

N° d'enregistrement
au CNRS
AO 4213

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en tout

LA THESE DE DOCTORAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS
par

JEAN CHAPRONT

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la thèse

CONSTRUCTION D'UNE THEORIE LITTERALE PLANETAIRE
JUSQU'AU SECOND ORDRE DES MASSES.

Soutenue le 10 avril 1970 devant la commission d'examen

MM. Y. THIRY

Président

J. RÖSCH

Examineurs

F. NAHON

J. KOVALEVSKY

B. MORANDO

N° d'enregistrement
au CNRS
AO 4213

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en tout

LA THESE DE DOCTORAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

JEAN CHAPRONT

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la thèse

CONSTRUCTION D'UNE THEORIE LITTERALE PLANETAIRE

JUSQU'AU SECOND ORDRE DES MASSES.

Soutenue le 10 avril 1970 devant la commission d'examen

MM. Y. THIRY

Président

J. RÖSCH

Examineurs

F. NAHON

J. KOVALEVSKY

B. MORANDO



UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550221_0006

Construction d'une théorie littérale planétaire jusqu'au second ordre des masses

J. CHAPRONT
Bureau des Longitudes, Paris

Reçu le 28 février 1970

Construction of a Planetary Theory to the Second Order of the Masses

This work is a contribution to the research on literal developments in Celestial Mechanics. It takes place in the frame of the researches which have been undertaken at the *Bureau des Longitudes* in the construction of analytical solutions for the motions of the moon and planets. In this paper we present a construction of a planetary theory to the second order of the disturbing masses. We seek to apply this method to any set of two or three planets of the solar system. In this type of work, the technics of handling literal series on computers are of the same kind as for the construction of an analytical solution in the main problem of the lunar theory. The difficulty with respect to the problem of the moon's motion is not in the elaboration of an iterative procedure to integrate the differential equations giving the variations of the osculating variables, since we look for a solution to the second order of the masses (only one or two iterations), but rather to give to the parameters of the motion a sufficiently short representation, easy to handle, in order to reach practically large values of the ratios of the semi-major axes α . (In the solar system there exists α as great as 0.72.) In the planetary case the number of parameters is larger than in the problem of the moon's motion. We divide this article into two parts.

1) The First Order

We have to choose among the numerous methods for developing the disturbing function R , a formula able to give in an analytical form the coefficients of any given argument. First we set a list of arguments which contains all the principal inequalities of the solar system, the planets being taken all together. We use a recent formula which is due to *V. A. Brumberg*, in which the two inclinations i and i' of the planets are introduced, with two excentricities e , e' and the ratio of the semi-major axes α . The originality of the method lies in the fact that we are able to develop any coefficient of the disturbing function, argument by argument. The form of the developments conceived for satellite problems are not directly useful because of the very slow convergence of the polynomials in α , in the planetary case. We modified the formulae to render the developments more quickly convergent in the following way. We associate to each characteristic ε^s , where $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

$$\varepsilon^s = e^{s_1} \times e'^{s_2} \times \gamma^{s_3} \times \gamma'^{s_4}$$

($\gamma = \sin i/2$) the function $(1 - \alpha^2)^{-s}$. This device which is justified by a property of the hypergeometric function gives to the functions of α , $f(\alpha)$, a "reasonable dimension" in the sense that it is sufficient to keep from 8 to 15 terms in $f(\alpha)$ (looked on as a truncated series) to get a good precision even for $\alpha \sim 0.75$. R is then represented as a series of the form:

$$R = \sum_{s_i, j, \lambda} \alpha^\lambda e^{s_1} e'^{s_2} \gamma^{s_3} \gamma'^{s_4} \frac{P_{s_i}(\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^s} \cos \phi_j \quad (1)$$

where ϕ_j is an argument as,

$$\phi_j = k_1 \lambda + k_2 \lambda' + k_3 \varpi + k_4 \varpi' + k_5 (h - h') \quad (2)$$

With slight modification of s , we develop in the same way the keplerian elements a , e , ϖ , γ , h and λ . A program has been built to construct those developments in order to reach the order 7 with respect to the small quantities e , e' , γ , γ' . A simple procedure is given to factorise $(1 - \alpha^2)^{-s}$ in (1) if we use directly Brumberg's formula.

We indicate also, how to modify the method in order to construct directly R in a form where $f(\alpha) = \frac{\alpha^\lambda P(\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^s}$. In the Tables 3 and 8 we give samples of the resulting series.

2) The Second Order

After integrating arguments like (2) there appears divisors of the form: $k_1 n + k_2 n'$. n and n' are the mean motions of the longitudes. As we look for a development of the solutions in the same form as *Leverrier's*, in the arguments (2), ϖ , ϖ' , h , and h' , are regarded as constants. In the construction of the second order, we

limit ourselves to the case of only one inclination i , ($\gamma' = 0$) and construct the terms proportional to the square of one disturbing mass (m^2 or m'^2). This simplifies the series without modifying the general aspect of the solutions. If x_i represents any variable, $\Delta_1 x_i$ the result of the first order approximation, and σ_j the second member of a lagrangian equation for the variable x_j , we have to form the quantities like:

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \Delta_1 x_i \quad (3)$$

to get the second order $\Delta_2 x_j$. In (3) $\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}$ and $\Delta_1 x_i$ are series as in (1). Because of the great intricacy of an elementary operation in (3) (i.e. the operation for two given arguments of $\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}$ and $\Delta_1 x_i$) and because of the great number of arguments, it is not intended to operate a direct product of Fourier series as is the case in the lunar problem. We look for a method capable of reaching any argument given separately in the second order. For this aim we separate the job in two times: on the one hand we undertake the computation at the level of the polynomials. (Coefficients in $\Delta_1 x_i$ and $\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}$). On the other hand, we perform the multiplications and additions of the Fourier series at the level of the arguments and the associated characteristics with a convenient limitation in order of magnitudes. The second part of the job requires the execution of the first. Because of the appearance of the divisors in the series like (1) for $\Delta_1 x_i$ through:

$$\frac{f(\alpha)}{k_1 n + k_2 n'} \quad (4)$$

we choose to represent expression like (4) in the case where $k_1 n + k_2 n'$ may become to zero in the interval of possible values of n/n' (0; 0.66 in the solar system.) by:

$$\frac{a_1}{k_1 n + k_2 n'} + Q_P(\alpha).$$

In this formula a_1 is one number given by interpolation and $Q_P(\alpha)$ is an interpolation polynomial defined in P points. After operating with series like in (3), each argument is finally represented, for a given characteristics ε^s as:

$$\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_1^i n + k_2^i n'} + S_P(\alpha).$$

The interpolation polynomial $S_P(\alpha)$ has been defined in the work with $P = 8$. The integer N varies with the arguments but, in general it never exceeds 10. This method consists of separating in (4) a part easy to interpolate and well represented by Q_P , and the hyperbolas $\frac{a_i}{k_1^i n + k_2^i n'}$ for the possible poles $\frac{n'}{n} = -\frac{k_1^i}{k_2^i}$. We show the validity for all practical α , of this representation.

After numerous experiments we concluded that the relative precision was never larger than 10^{-3} for the maximum value of α . (It decreases with α .) The results are given for characteristics to ε^3 . A complementary notion of order is introduced for the divisors: We keep all the characteristics to ε^5 when a divisor is present in an argument. A sample of results is given in Table 7.

Key words: planetary theory — literal series — secular perturbations

Introduction

Le but de ce travail est de présenter un développement complètement analytique des éléments osculateurs, au premier ordre des masses, d'une planète quelconque du système solaire, ainsi que de préparer la construction d'un second ordre littéral, en apportant quelques résultats partiels pour un couple de planètes. Nous envisageons une théorie globale pour un ensemble de planètes, prises deux à deux ou trois à trois, valable pour des rapports de demi-grands axes allant jusqu'à 0,75 (Pluton est excepté). Ce travail est une contribution à l'ensemble des recherches, sur les développements littéraux entrepris au Bureau des Longitudes, sous la direction de J. Kovalevsky, dans des problèmes de type lunaire ou de type planétaire.

Dans un premier temps, nous nous sommes proposés de construire une théorie planétaire du même type que celle de Le Verrier (1874), où l'on ne fait pas de distinction, dans l'intégration des éléments, entre termes à longues périodes et termes séculaires. Ainsi, on fait apparaître au second ordre dans les variations de l'excentricité et de l'inclinaison des termes proportionnels au temps ou au carré du temps, séculaires, ou dits «de Poisson». Comme nous avons en vue une théorie globale, nous avons généralisé les résultats de Le Verrier, valables pour un couple de planètes seulement, en introduisant les modifications suivantes:

α — Dans le développement de la fonction perturbatrice pour un couple de planètes, on fait rentrer les deux inclinaisons des deux corps par

rapport à un plan fixe. On évite ainsi le mélange d'une inclinaison et de l'inclinaison mutuelle, ainsi que la dissymétrie dans les variables angulaires. On sait en effet que ce mélange devient très complexe lorsqu'on est amené à introduire plus de deux planètes. Si les variables angulaires de Le Verrier simplifient la formulation du premier ordre, elles exigent l'introduction supplémentaire de formules de transformations au système des équations de Lagrange, qui ne permettent pas de systématiser simplement le formulaire et qui rendent l'interprétation géométrique des résultats souvent difficile. On pourra choisir comme plan de référence auquel sont rapportées les inclinaisons, le plan de l'écliptique, ou un plan moyen qui rend ces inclinaisons minimales.

b — Les développements sont littéraux dans les rapports des demi-grands axes. On évite ainsi de refaire toute une partie des calculs pour deux couples différents de planètes. Il est facile d'imaginer que dans le système solaire pour l'ensemble du premier et du second ordre le nombre de cas possibles est considérable même si un grand nombre d'entre eux est à écarter (les perturbations de Mercure sur Uranus, par exemple). Cela ne signifie pas cependant, qu'il est possible de faire une théorie unique. Il faudra ainsi distinguer entre les perturbations d'une planète intérieure sur une planète extérieure et l'inverse. Nous limiterons le nombre de cas au minimum. Un autre avantage des développements analytiques sur des développements faits pour une valeur fixée des demi-grands axes est de permettre l'amélioration des constantes d'intégration (moyens mouvements et demi-grands axes). Enfin l'examen des résultats devrait permettre d'étudier la convergence des séries.

c — Les petits diviseurs les plus remarquables rencontrés pour des rapports de moyens mouvements compris entre 0 et 0,65 sont conservés sous forme littérale. Leur connaissance est importante car la valeur d'un terme qui renferme un petit diviseur est évidemment très sensible à la variation du rapport des moyens mouvements. Nous avons introduit, en outre, une notion d'ordre pour ces petits diviseurs au même titre qu'on se limite à une certaine puissance des excentricités et des inclinaisons. Il serait en effet illusoire de calculer avec la même précision relative tous les termes périodiques au second ordre, alors que certains, comme c'est le cas pour la grande inégalité dans le mouvement de Jupiter et de Saturne, peuvent atteindre des valeurs cent fois ou mille fois plus grandes que d'autres, à caractéristiques égales, c'est-à-dire pour des

valeurs des puissances des petits paramètres semblables.

Dans un tel travail le volume des calculs est considérable, et son aboutissement demandera sans doute quelques années de recherches supplémentaires. Il nous est donc apparu nécessaire d'en fixer les limites avec le matériel électronique dont nous disposons au Bureau des Longitudes, du point de vue des résultats à atteindre. Nous nous sommes attachés à construire au premier ordre des masses, une théorie aussi complète que possible, susceptible d'être utilisée ensuite dans une élaboration complète du second ordre. Au second ordre des masses, nous apporterons un certain nombre de résultats partiels. Dans ce cas, nous nous sommes efforcés essentiellement de justifier la validité de la méthode employée en étudiant l'allure et la précision atteinte dans les fonctions des demi-grands axes, afin de préparer la construction d'un programme général pour une théorie globale. Ainsi, nous verrons par la suite que nous nous sommes imposé certaines limitations, comme de rendre une inclinaison nulle au second ordre, afin de nous faciliter la manipulation de séries sur la GAMMA 30 du Bureau des Longitudes. Ces limitations ne sont pas essentielles, et ne changent pas le caractère des résultats.

Enfin, il convient de dire quelques mots sur le choix de la méthode utilisée, la plus directe possible, en intégrant le système des variables elliptiques de Lagrange. Dans une première approche du problème, nous avons été guidés dans ce choix par deux raisons essentielles :

a — Les seuls éléments de comparaison disponibles, dans ce domaine, sont les résultats des travaux analytiques de Le Verrier (1874), Izsak (1965) et Brumberg (1967), qui sont tous exprimés en variables de Lagrange. En dehors des vérifications internes du type du théorème de Poisson sur l'invariabilité des demi-grands axes, on comprend facilement combien il est important de jalonner par des vérifications partielles, commodées, une recherche où le volume de calcul est très important. La comparaison avec les résultats d'une théorie numérique, type méthode de Hansen ou coordonnées rectangulaires de Brouwer, est beaucoup plus délicate et suppose souvent un calcul complet, sans intermédiaire (Hamid, 1969).

b — Le système des équations de Lagrange est sans doute le plus simple qu'on puisse envisager pour l'intégration et l'accroissement des variables, une fois que la fonction perturbatrice a été développée en fonction des éléments elliptiques. A l'inverse d'un problème de type lunaire, il n'y a pas lieu de

faire ici un grand nombre d'itérations (réduites à une ou deux pour le second et le troisième ordre) et de conserver à chaque itération, pour les séries résultats, une forme standard. Ici la difficulté réside dans le nombre et la diversité des quantités à traiter qu'il faut réduire et simplifier au maximum et non pas dans le choix d'un formulaire qu'il faut rendre aussi direct que possible. Les rapports des demi-grands axes et des moyens mouvements ne sont pas des petits paramètres. Ils rentrent dans les coefficients des termes périodiques sous des formes très différentes; les premiers à travers les coefficients de Laplace et de leurs dérivées dans le développement de la fonction perturbatrice, les seconds sous la forme de fractions rationnelles après l'intégration des termes à courtes périodes.

A. Le premier ordre

1. Choix d'un formulaire pour la fonction perturbatrice

Les formulaires les plus récents sur le développement de la fonction perturbatrice sont ceux de Izsak (1964), Kaula (1962), Brumberg (1967), Challe et Laclaverie (1969), qui sont tous adaptés à un traitement sur ordinateurs électroniques, bien que les deux derniers aient été mis au point pour des problèmes de satellite. Izsak introduit l'inclinaison mutuelle J des deux orbites dans son développement numérique en α (rapport des demi-grands axes) qui nous a été très précieux pour vérifier nos propres résultats. En désignant par a'/Δ la partie principale de R , il écrit:

$$a'/\Delta = \sum_{q,q',r,s} A_{q,q',r,s} \cos(ql + q'l' + (r+s)\lambda - (r-s)\lambda')$$

où l et l' sont les anomalies moyennes, et λ , λ' les longitudes moyennes:

$$\lambda = l + g + h, \quad \lambda' = l' + g' + h',$$

g et g' sont les arguments des périodes; h et h' sont les longitudes des noeuds. q , q' , r et s désignent des entiers. Dans ce développement à quatre arguments les $A_{q,q',r,s}$ sont des fonctions de α , $\sigma = \sin J/2$ et des excentricités e et e' , développées sous la forme:

$$A_{q,q',r,s} = \sum_{m,m'} a_{q,q',r,s}^{m,m'} e^m e'^{m'} \quad (1)$$

Les $a_{q,q',r,s}^{m,m'}$ s'expriment à l'aide des coefficients de Jacobi auxquels sont appliqués les opérateurs de Newcomb pour passer du cas où les excentricités sont nulles à celui du développement (1).

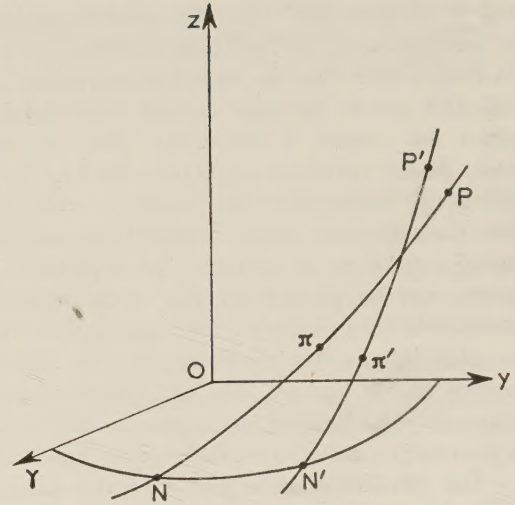


Fig. 1

Les coefficients $b_{pq}(\alpha, J)$ de Jacobi apparaissent dans le développement de Fourier de

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos S)^{-1/2} = \sum_{p,q} b_{pq}(\alpha, J) \exp i \psi \exp i \phi. \quad (2)$$

avec, $\cos S = \cos^2 J/2 \cos \psi + \sin^2 J/2 \cos \phi$. A ce niveau du calcul, la méthode ne se distingue pas de celle de Tisserand (1888) qui démontre qu'on peut ramener le calcul des expressions dépendant de l'inclinaison au carré d'une fonction hypergéométrique de paramètre $\sin^2 J/2 = \sigma^2$. On peut alors développer les coefficients de Jacobi en σ^2 . Les coefficients du développement sont des fonctions linéaires des coefficients de Laplace.

Izsak donne alors aux coefficients de Laplace et aux dérivées de Newcomb une valeur numérique $\alpha = \alpha_0$ (application au cas de Jupiter et de Saturne). Sans avoir à modifier beaucoup le formulaire on pourrait imaginer, à ce stade, conserver les coefficients de Laplace et leurs dérivées sous une forme littérale en α . Pour l'inclinaison mutuelle on remplacerait aussi $\sigma = \sin J/2$ par une expression en fonction des deux inclinaisons i et i' et de la différence des longitudes des noeuds $h - h'$ (Fig. 1)

$$\cos J = 1 - 2\sigma^2 = \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos(h - h'). \quad (3)$$

Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Nous avons préféré utiliser le très élégant formulaire de Brumberg qui donne directement le développement de a'/Δ en fonction de $\alpha = a/a'$, rapport des

demi-grands axes, et des deux quantités

$$\gamma = \sin \frac{i}{2}; \quad \gamma' = \sin \frac{i'}{2}$$

où i et i' sont les deux inclinaisons. Nous reprendrons ici le schéma de la méthode de développement de Brumberg afin de définir nos notations et de bien comprendre le mécanisme extrêmement simple de formation d'un terme quelconque de la fonction perturbatrice. Dans le cas d'une planète intérieure perturbée par une planète extérieure, partant de R .

$$R = fm' \sum_{k=2} \frac{r^k}{r'^{k+1}} P_k(\cos S), \quad ; \quad r' > r$$

développée en polynôme de Legendre de $\cos S$ (où S est l'angle à l'astre) on trouve:

$$R = fm' \sum_{q,q',s,s',j} A_{q,q',s,s',j}$$

$$\times \cos [ql + q'l' + sg + s'g' + j(h - h')]$$

où

$$a A_{q,q',s,s',j} = (2 - \delta_j^0) \sum_{k=\lambda} \left(\frac{a}{a'} \right)^{k+1} X_q^{k,s}(e) X_{q'}^{-k-1,s'}(e') \times C_{s,s',j}^k(\gamma, \gamma') \quad (4)$$

λ est la borne inférieure de sommation sur k
 $\lambda = u + 2m$,

$$\text{avec } u = \left| \frac{s-s'}{2} \right| + \left| \frac{s+s'}{2} \right| \quad (5)$$

Dans la suite le prime (') sera réservé à la planète extérieure. Au terme en $\frac{r'}{r^2} \cos S$ près, m est la seule quantité qui distingue le cas d'une planète intérieure (m_E) perturbée par une planète extérieure, du cas contraire m_I

$$m_E = \max \left\{ 0, E \left(\frac{\max(2, |j|) - u + 1}{2} \right) \right\},$$

$$m_I = \max \left\{ 0, E \left(\frac{|j| - u + 1}{2} \right) \right\}. \quad (6)$$

Dans la formule (4) les $X_q^{k,s}$ sont les coefficients de Hansen qui peuvent se définir ainsi:

$$\left(\frac{r}{a} \right)^k \exp isv = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} X_q^{k,s}(e) \exp iql, \quad (7)$$

r est le rayon vecteur; v est l'anomalie vraie.

On peut aussi les relier aux opérateurs de Newcomb Π_r^n à l'aide de la formulation suivante:

$$X_{r+s}^{k,s}(e) = \sum_n \Pi_r^n(k, s) e^n \quad (8)$$

avec $r = q - s$.

C'est dans la formulation des $C_{s,s',j}^k$ que réside l'élégance de la méthode de Brumberg. Il démontre en effet qu'on peut écrire ceux-ci sous la forme:

$$C_{s,s',j}^k = c_{s,s',j}^k \gamma^{|s-j|} \gamma'^{|s'+j|} (1 - \gamma^2)^{\left| \frac{s+j}{2} \right|} (1 - \gamma'^2)^{\left| \frac{s'-j}{2} \right|} \times F_{k,s,j}(\gamma^2) F'_{k,s',j}(\gamma'^2). \quad (9)$$

Les $c_{s,s',j}^k$ sont des constantes calculées à partir de la valeur des entiers k, s, s', j et de la fonction $\Gamma(n)$.

Les deux fonctions F et F' sont des fonctions hypergéométriques de paramètres γ^2 et γ'^2 calculées aussi à l'aide des entiers k, s, s', j . La forme $C_{s,s',j}^k(\gamma, \gamma')$ généralise le théorème de Stieljes et Tisserand au cas de deux inclinaisons i et i' . En résumé, disons que le calcul des $A_{q,q',s,s',j}$ se ramène aux opérations élémentaires suivantes après qu'on se soit donné l'ensemble des nombres (q, q', s, s', j)

a) expression de la borne inférieure λ .

b) calcul des coefficients de Hansen.

c) calcul des constantes $c_{s,s',j}^k$ qui se ramène au calcul de $\Gamma(n)$ pour n entier ou demi-entier.

d) formulation de la fonction hypergéométrique de définition:

$$F(p, q, r; \gamma) = 1 + \sum_{n=0} \frac{p(p+1) \dots (p+n) q(q+1) \dots (q+n)}{r(r+1) \dots (r+n) (n+1)!} \gamma^{n+1}$$

On doit adjoindre la condition suivante sur s et s' :

$$s + s' = \text{pair.}$$

D'autre part on doit faire progresser k de deux en deux depuis sa borne inférieure λ . Il n'y a rien à ajouter sur les points a, c et d . La seule difficulté provient du b pour le calcul des coefficients de Hansen.

2. Calcul des coefficients de Hansen

Les contributions au calcul des coefficients de Hansen ou des opérateurs de Newcomb sont nombreuses, notamment avec Plummer (1968) et Von Zeipel (1912). C'est en s'appuyant sur une relation de récurrence découverte par Von Zeipel qu'Izsak donne un formulaire très commode pour le calcul des $X_q^{k,s}$. D'après leur définition (7) et leur relation avec les opérateurs de Newcomb (8) on écrit le développement

$$X_{r+s}^{k,s} = e^{|r|} \{ X_{0,|r|}^{k,s} + X_{1,|r|+1}^{k,s} e^2 + X_{2,|r|+2}^{k,s} e^4 + \dots \} \quad (10)$$

$$q = r + s.$$

On peut toujours supposer q positif car si $q \geq 0$ on évalue $X_{r+s}^{k,s}$ et si $q < 0$ on évalue $X_{-r-s}^{k,s} = X_{r+s}^{k,s} = X_q^{k,s}$.

Les $X_{\rho,\sigma}^{k,s}$ vérifient les deux relations de récurrence qui suivent, qui nous permettront de les construire de proche en proche avec $X_{0,0}^{k,s} = 1$, et

$$4\rho X_{\rho,\sigma}^{k,s} = 2(2s - k) X_{\rho-1,\sigma}^{k,s+1} + (s - k) X_{\rho-2,\sigma}^{k,s+2} \\ + (5\rho - \sigma - 4 + 4s - k) X_{\rho-1,\sigma-1}^{k,s} \\ - 2(\rho - \sigma + s) \sum_{u \geq 2} (-1)^u \binom{3/2}{u} X_{\rho-u,\sigma-u}^{k,s}$$

et

$$4\sigma X_{\rho,\sigma}^{k,s} = -2(2s + k) X_{\rho,\sigma-1}^{k,s-1} - (s + k) X_{\rho,\sigma-2}^{k,s-2} \\ - (\rho - 5\sigma + 4 + 4s + k) X_{\rho-1,\sigma-1}^{k,s} \\ + 2(\rho - \sigma + s) \sum_{u \geq 2} (-1)^u \binom{3/2}{u} X_{\rho-u,\sigma-u}^{k,s}.$$

Nous avons écrit un programme de calcul des opérateurs de Newcomb jusqu'à $\rho + \sigma \leq 12$ en double précision (16 décimales) avec lequel on peut atteindre des quantités jusqu'à l'ordre 12 des petits paramètres dans le développement de R . Les fonctions $X_{\rho,\sigma}^{k,s}$ tabulées, analytiques en k et s , achèvent la construction très rapide de n'importe quel coefficient $A_{q,q',s,s',j}$ de la formule (4) lorsque q, q', s, s', j sont donnés.

3. Étude du rapport des demi-grands axes

Une difficulté essentielle du problème planétaire est la représentation des fonctions qui font intervenir les rapports des demi-grands axes. On sait, en effet, que dans l'ensemble des planètes du système solaire ce rapport α peut atteindre des valeurs jusqu'à 0,72 et qu'on ne peut plus considérer α comme un petit paramètre, comme c'est le cas dans un problème de perturbation de type lunaire. L'examen des coefficients de Laplace et de leurs dérivées montre clairement que pour obtenir une précision suffisante dans la valeur des coefficients du développement de la fonction perturbatrice, il faut conserver un très grand nombre de termes α^p (de l'ordre de 50 à 150 termes si l'on exige 8 chiffres significatifs dans les résultats). Ce nombre est d'autant plus grand que la dérivée du coefficient est d'ordre plus élevé, c'est-à-dire attaché à une caractéristique en excentricité et en inclinaison plus importante. De tels développements de Taylor, autour de $\alpha = 0$, présenteraient deux graves inconvénients. D'une part, dans la substitution numérique d'une valeur parti-

Tableau 1. *Rapports des demi-grands axes*
 $\alpha = a/a', a < a'$

	Vénus	Terre	Mars	Ju- piter	Sa- turne	Ura- nus	Nep- tune
Mercure	0,535	0,387	0,254	0,074	0,041	0,020	0,013
Vénus		0,723	0,475	0,139	0,076	0,038	0,024
Terre			0,656	0,192	0,105	0,052	0,033
Mars				0,293	0,159	0,079	0,051
Jupiter					0,545	0,271	0,173
Saturne						0,497	0,317
Uranus							0,638
Neptune							

Tableau 2. *Rapports des moyens mouvements*
 $v = n'/n; n > n'$

	Vénus	Terre	Mars	Ju- piter	Sa- turne	Ura- nus	Nep- tune
Mercure	0,392	0,241	0,128	0,020	0,008	0,003	0,001
Vénus		0,615	0,327	0,052	0,029	0,007	0,004
Terre			0,532	0,084	0,034	0,012	0,006
Mars				0,159	0,064	0,022	0,011
Jupiter					0,403	0,141	0,072
Saturne						0,351	0,179
Uranus							0,510

culière de $\alpha = \alpha_0$, il y aurait une perte importante de précision dans la sommation d'une centaine de termes. D'autre part, la manipulation sur ordinateurs de développement aussi lourds rendrait sans doute la théorie inutilisable. Il convient donc de rechercher une représentation des fonctions de α suffisamment dense pour permettre la construction d'un second ordre et au delà. Dans le Tableau 1 nous avons donné les différentes valeurs des demi-grands axes qui interviennent dans le système solaire. Une image de cette répartition est donnée sur la Fig. 2 où chaque point représente un couple de planètes. Ce schéma nous permet de tirer les conclusions suivantes : En écartant le point $\alpha_0 = 0,387$ (Mercure-Terre) et les faibles valeurs de α ($\alpha < 0,2$), pour lesquelles un développement de Taylor autour de zéro peut être utilisé, on remarque qu'on peut rassembler les couples de planètes en 3 groupes, dont nous donnons les points moyens :

Groupe 1; $\alpha_1 = 0,672$,

Groupe 2; $\alpha_2 = 0,513$,

Groupe 3; $\alpha_3 = 0,284$.

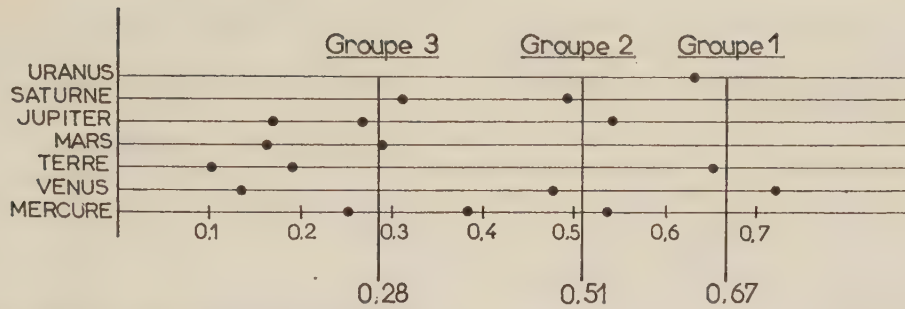


Fig. 2. Les points sur une même ligne représentent les rapports des demi-grands axes de la planète considérée avec une planète extérieure à elle. (On s'éloigne du Soleil de la gauche vers la droite.)

Autour de ces points moyens, aucune des valeurs de α ne s'écarte de plus de $\Delta\alpha = 0,05$. A cause de la petitesse du $\Delta\alpha$, on pourrait imaginer faire 3 types de théories pour chacun de ces groupes en calculant les fonctions des demi-grands axes pour les trois valeurs α_i ($i = 1, 2, 3$) et en effectuant un développement de Taylor autour de ces points. Dans ce cas, on utiliserait directement une forme semi-numérique de la fonction perturbatrice où interviendraient explicitement les coefficients de Laplace et leurs dérivées comme c'est le cas dans un formulaire tel que celui de Izsak. S'il n'y a pas d'inconvénient à refaire 3 fois le calcul de la fonction perturbatrice et de ses dérivées en α , il y a cependant deux objections à cette méthode :

α — Même pour de petites valeurs de $\Delta\alpha$, les développements de Taylor :

$$f(\alpha) = \sum_i \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{d\alpha^i} (\Delta\alpha)^i$$

ont une convergence numérique très lente, car les dérivées $\frac{d^i f}{d\alpha^i}$ sont très rapidement croissantes (comme c'est le cas pour les dérivées des coefficients de Laplace. (On pourra voir à ce sujet l'étude numérique de Izsak). Sur un échantillon de fonctions $f(\alpha)$ nous avons tenté quelques expériences numériques en variant α et $\Delta\alpha$, et nous avons renoncé à cette méthode qui nous obligeait à conserver de l'ordre de 50 termes pour $\alpha = 0,7$ $\Delta\alpha = 0,04$, pour des caractéristiques élevées à la précision du 1/1000 de seconde dans la valeur d'un coefficient. Une autre objection de même nature sera soulevée dans l'étude du second ordre, lorsqu'on fera intervenir le rapport des moyens mouvements n'/n après l'intégration du premier ordre.

b — Ce partage des couples de planètes en trois groupes, malgré la simplification qu'il apporte,

multiplie cependant le nombre de développements nécessaires pour le second ordre puisqu'il faut alors considérer les perturbations à l'intérieur de chaque groupe, et celles entre les différents groupes. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre (B, 1).

Examinons maintenant avec quelques détails les fonctions $f(\alpha)$ qui interviennent dans le développement de R , en écrivant d'abord la formule de définition des coefficients de Laplace :

$$(1 - 2\alpha \cos \phi + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^i \cos i \phi,$$

s : demi-entier.

On sait que dans le développement de R en puissance des petits paramètres e , e' et σ (inclinaison mutuelle) les coefficients des monômes $e^{r_1} e'^{r_2} \sigma^{r_3}$, où r_1 , r_2 , r_3 sont des entiers, sont constitués de combinaisons linéaires finies des b_s^i et de leurs dérivées de Newcomb D_α^k où

$$D_\alpha^k = \frac{d^k}{d\beta^k}, \quad \beta = \log \alpha.$$

On pourra regarder à ce sujet Brouwer et Clemence (1961). De façon générale r_3 , est proportionnel à s et l'ordre k maximum de la dérivée est tel que l'on ait :

$$k = r_1 + r_2.$$

Si l'on s'intéresse maintenant aux développements des éléments osculateurs, les propriétés des coefficients sont les mêmes que dans R . Notons simplement pour l'instant que, si les éléments sont calculés à partir de l'intégration des équations de Lagrange, il peut y avoir une perte de deux ordres en e , e' ou σ et que k est augmenté d'une unité dans l'expression de la longitude. Nous nous contenterons d'examiner les b_s^i et leurs dérivées, sachant que ceux-ci rentrent linéairement dans les coefficients, et que les conclusions tirées resteront vraies pour les $A_{a, a', s, s', j}$.

On peut choisir pour l'expression des b_s^i , une formule où intervient le produit d'une fonction hypergéométrique et d'une fraction rationnelle en α soit,

$$\frac{1}{2} b_s^i = \frac{s(s+1) \dots (s+i-1)}{i!} \times \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^2)^{s-1}} \cdot F(i+1-s, 1-s, i+1; \alpha^2). \quad (11)$$

Le terme général de F développée en série de α^2 est:

$$u_{2p} = (\text{coefficient de } \alpha^{2p}) = \frac{(1-s)(2-s) \dots (p-s)}{p!} \times \frac{(i+1-s)(i+2-s) \dots (i+p-s)}{(i+1) \dots (i+p)}.$$

Comparons le terme général u_{2p} à celui de b_s^i lorsqu'on n'a pas fait apparaître le facteur $(1-\alpha^2)^{-2s+1}$ et qui provient du développement de la fonction hypergéométrique F de paramètres $(s, s+i, i+1)$. Nous désignerons cette fonction par F_1

$$\frac{1}{2} b_s^i = \frac{s(s+1) \dots (s+i-1)}{i!} \cdot \alpha^i F_1(s, s+i, i+1; \alpha^2) \quad (12)$$

soit,

$$v_{2p} = \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{p!} \times \frac{(s+i)(s+i+1) \dots (s+i+p-1)}{(i+1) \dots (i+p)}.$$

Formons le rapport $w = \frac{u_{2p}}{v_{2p}}$ afin d'examiner l'allure de la rapidité de décroissance des termes de la suite u_{2p} par rapport à la suite v_{2p} . Remarquons qu'on sait en particulier que F tend vers une limite finie pour $\alpha = 1$ lorsque $s \geq 3/2$, mais reste infinie pour $s = 1/2$, $\alpha = 1$. La rapidité de décroissance des coefficients est en effet très importante (même si les séries sont divergentes pour $\alpha = 1$) afin de pouvoir représenter la fonction $f(\alpha)$ de la manière la plus courte possible.

$$w = \frac{(1-s)(2-s) \dots (p-s)}{s(s+1) \dots (p-1+s)} \times \frac{(i+1-s)(i+2-s) \dots (i+p-s)}{(i+s)(i+1+s) \dots (i+p-1+s)}$$

si nous posons $s = \frac{2r+1}{2}$, il vient:

$$w = \frac{(1-2r)(3-2r) \dots (2p-1-2r)}{(1+2r)(3+2r) \dots (2p-1+2r)} \times \frac{(2i+1-2r)(2i+3-2r) \dots (2i+2p-1-2r)}{(2i+1+2r)(2i+3+2r) \dots (2i+2p-1+2r)}$$

il est facile de voir que si l'on pose:

$$\sigma_j = \frac{1}{2p-j+2r}$$

la première fraction f_1 se réduit à:

$r = 1$ $f_1 = -\sigma_1 \sigma_3$ de l'ordre de λ/p^2 si p est grand devant r ,

$r = 2$ $f_1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5$, de l'ordre de λ/p^3 et ainsi de suite.

Quant à la deuxième fraction f_2 , il est clair qu'elle se réduit à la première, si l'on remarque que:

pour $i = 1$

$$f_2 = \frac{1+2r}{1-2r} f_1 \quad ; p \text{ changé en } p+1,$$

$$i = 2$$

$$f_2 = \frac{1+2r}{1-2r} \times \frac{3+2r}{3-2r} f_1 ; p \text{ changé en } p+2$$

et ainsi de suite.

A l'aide de ces résultats il est facile de voir que le terme général de u_{2p} est très inférieur à v_{2p} dès que p est assez grand. Ainsi, la mise en facteur de $(1-\alpha^2)^{-2s+1}$ dans les b_s^i rendra l'évaluation numérique des polynômes en α^2 beaucoup plus rapide puisque les coefficients de la série u_{2p} par rapport à ceux de v_{2p} sont réduits dans le rapport p^{-k} ($k > 0$). Le mot «évaluation numérique» est employé dans le sens où il faudra beaucoup moins de termes pour calculer les b_s^i à l'aide de (11) qu'avec (12). On pourrait aussi, pour s'en convaincre évaluer les rapports:

$$\frac{\sum_0^N u_{2p} \alpha^{2p}}{\sum_0^N v_{2p} \alpha^{2p}}$$

quand par exemple $\sum_0^N v_{2p} \alpha^{2p}$ est connue à la précision ε .

De la même façon dans la dérivée première de b_s^i , on fait apparaître le facteur $(1-\alpha^2)^{-1}$ puisque l'on a:

$$\alpha \frac{db_s^i}{d\alpha} = \frac{[i + (i+2s)\alpha^2] b_s^i - 2(i+1-s)\alpha b_s^{i+1}}{(1-\alpha^2)}. \quad (13)$$

Sans entrer dans le détail d'une algèbre assez lourde, disons simplement que la conclusion reste la même, et que la convergence est beaucoup plus rapide au niveau de la formule (13) que par simple dérivation de la formule (12).

De manière générale, on utilise les relations de récurrence sur les dérivées des b_s^i (ici $s = 1/2$, $i = 1$)

du type :

$$\begin{aligned} \alpha^{q+1} (1 - \alpha^2) \frac{d^{q+1} b_{1/2}^1}{d\alpha^{q+1}} &= \alpha^2 \left[(3q+1) \alpha^q \frac{d^q}{d\alpha^q} b_{1/2}^1 \right. \\ &+ (3q^2 - q - 1) \alpha^{q-1} \frac{d^{q-1}}{d\alpha^{q-1}} b_{1/2}^1 \\ &\left. + q^2 (q-2) \alpha^{q-2} \frac{d^{q-2}}{d\alpha^{q-2}} b_{1/2}^1 - (q+1) \alpha^{q-2} \frac{d^q}{d\alpha^2} b_{1/2}^1 \right]. \end{aligned}$$

afin de mettre en évidence le facteur $(1 - \alpha^2)$ pour passer de la dérivée de rang p à celle de rang $p+1$. Lorsqu'on écrit :

$$\psi(\alpha^2) = (1 - \alpha^2)^{-e} \phi(\alpha^2) \quad (14)$$

les propriétés de rapidité dans l'évaluation numérique des coefficients de la série $\phi(\alpha^2)$ par rapport aux séries $\psi(\alpha^2)$ sont conservées.

Remarque — Le Verrier avait déjà utilisé cette propriété dans son calcul des coefficients de Laplace, dans sa théorie de Jupiter et de Saturne, puisqu'il ne considérait plus la variable α^2 mais plutôt

$$\beta = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Ce changement de variables est indiqué par les propriétés de la fonction hypergéométrique, aux 3 paramètres u, v, w et à la variable β :

$$\begin{aligned} F(u, v, w; \alpha^2) &= (1 - \alpha^2)^{-u} F(u, w - v, w; -\beta) \\ &= (1 - \alpha^2)^{-v} F(w - u, v, w; -\beta) \end{aligned}$$

(Whittaker et Watson, 1963).

Si ce changement de variables est bien adapté à la théorie de Jupiter et de Saturne ($\alpha = 0,545$), les séries ne sont plus convergentes pour $\beta = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \geq 1$ soit $\alpha \geq 0,707$ ce qui est en-dessous des valeurs de que nous admettons (Vénus — Terre : 0,723).

Notons que dans les formules ci-dessus les facteurs $(1 - \alpha^2)^{-u}$ et $(1 - \alpha^2)^{-v}$ ne mettent pas en évidence le pôle $\alpha^2 = 1$ de F à la puissance convenable, puisque l'on sait que l'évaluation asymptotique de F est :

$$F \sim \frac{A}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}} \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

Dans la formule (14) regardons maintenant comment associer ϱ , à la valeur de s et à l'ordre de la dérivée en α . Si l'on suit le schéma classique du développement de la fonction perturbatrice, on commence à considérer les excentricités nulles et l'on se ramène au développement en σ^2 , ou ce qui revient au même en i et i' grâce à la formule (3). Soient r_1 et r_2 les puissances de γ et γ' . Au monôme

$\gamma^{r_1} \gamma'^{r_2}$ est attaché le coefficient de Laplace b_s^i d'indice s tel que :

$$r_1 + r_2 = \text{nombre pair}$$

$$\text{et, } s = \frac{2p+1}{2} \text{ où } r_1 + r_2 = 2p.$$

On verra par exemple à ce sujet, Brown (1933).

On doit alors associer à $r_1 + r_2$ le facteur $(1 - \alpha^2)^{-e}$ avec $\varrho = 2s - 1 = r_1 + r_2$.

Lorsqu'on applique ensuite à ces développements les opérateurs de Newcomb afin de passer au cas des excentricités non nulles, on peut se rendre compte sur les formules (4) et (8) que l'ordre maximum de la dérivée est égal à la puissance de e ou e' . Si donc, l'on a : $e^{s_1} e'^{s_2}$ on aura le facteur $(1 - \alpha^2)^{-e}$ avec

$$\varrho = s_1 + s_2.$$

En résumé on donnera au polynôme $A_{a, q', s, s', j}$ de la formule (4) la forme suivante :

$$a A = \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \frac{P_{s_1, s_2, r_1, r_2}(\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^{s_1 + s_2 + r_1 + r_2}} e^{s_1} e'^{s_2} \gamma^{r_1} \gamma'^{r_2} \quad (15)$$

où les polynômes $P(\alpha^2)$ ont des coefficients qui décroissent beaucoup plus rapidement que dans A écrit sous sa forme (4).

À titre d'illustration nous donnons dans le Tableau 3 un échantillon des résultats pour un argument de la fonction perturbatrice, qui nous permet de comparer l'allure des développements en α^2 , avant et après la factorisation de $(1 - \alpha^2)^{-e}$. Ces calculs ont été effectués en double précision (16 chiffres) et publiés avec 10 chiffres à l'aide d'un programme de construction de R , où la seule donnée nécessaire est l'ensemble des entiers q, q', s, s', j qui définissent un argument :

$$\phi = ql + q' l' + sg + s' g' + j(h - h')$$

avec la condition $s + s' = \text{entier pair}$.

L'argument choisi est :

$$2l - 5l' + 5g - 5g' + 5(h - h').$$

Ce programme permet d'atteindre tous les arguments pour lesquels la caractéristique en e, e', γ et γ' est inférieure ou égale à 7. Nous avons exploité systématiquement le programme sur une centaine d'arguments de la fonction perturbatrice. (Cas d'une planète intérieure perturbée par une planète extérieure). Nous avons contrôlé nos résultats après la substitution numérique de

$$\alpha = 0,54543334 \quad (1950)$$

Tableau 3A. *Facteur: $\alpha^5 e^3; (1 - \alpha^2)^{-2}$ n'est pas en facteur*

(0,0,0,0)	-1835449218 E+02 *00	-1323437499 E+02 *02	-1367463684 E+02 *04	-1514790058 E+02 *06
-1712040777 E+02 *08	-1944017864 E+02 *10	-2204680669 E+02 *12	-2491136112 E+02 *14	-2801819999 E+02 *16
-3135810827 E+02 *18	-3492529713 E+02 *20	-3871594360 E+02 *22		
(2,0,0,2)	+9177246093 E+02 *00	+410265249 E+03 *02	+8888513946 E+03 *04	+1620825362 E+04 *06
+2687904019 E+04 *08	+4179638409 E+04 *10	+6195152680 E+04 *12	+8843533200 E+04 *14	+1224395339 E+05 *16
+1652572306 E+05 *18	+2182831070 E+05 *20	+2830135477 E+05 *22		
(2,0,0,2,0)	+3212036132 E+03 *00	+1455781249 E+03 *02	+3418659210 E+02 *04	-1211832046 E+ 3 *06
-3509683592 E+03 *08	-6804062526 E+03 *10	-1135410544 E+04 *12	-1743795278 E+04 *14	-2535647099 E+04 *16
-3543466235 E+04 *18	-4802228355 E+04 *20	-6349414751 E+04 *22		
(2,0,2,0,0)	+9177246093 E+02 *00	+4102656249 E+03 *02	+8888513946 E+03 *04	+1620825362 E+04 *06
+2687904019 E+04 *08	+4179638409 E+04 *10	+6195152680 E+04 *12	+8843533200 E+04 *14	+1224395339 E+05 *16
+1652572306 E+05 *18	+2182831070 E+05 *20	+2830135477 E+05 *22		
(2,2,0,0,0)	+2827514648 E+02 *00	+7738067626 E+01 *02	-1162900543 E+02 *04	-4198658466 E+02 *06
-8874528824 E+02 *08	-1572423186 E+03 *10	-2532805952 E+03 *12	-3832407800 E+03 *14	-5541152590 E+03 *16
-7735209850 E+03 *18	-1049705100 E+04 *20	-1391547675 E+04 *22		
(4,0,0,0,4)	-1835449218 E+03 *00	-3057140624 E+04 *02	-1408487594 E+05 *04	-4264134013 E+05 *06
-1042632833 E+06 *08	-2226872464 E+06 *10	-4322496919 E+06 *12	-7805975009 E+06 *14	-1331705045 E+07 *16
-2169197140 E+07 *18	-3399977675 E+07 *20	-5158163882 E+07 *22		
(4,0,0,2,2)	-1606018066 E+04 *00	-4512921874 E+04 *02	-2222128486 E+04 *04	+1296660289 E+05 *06
+5510203240 E+05 *08	+1462873443 E+06 *10	+3190503630 E+06 *12	+6190473240 E+06 *14	+1108077782 E+07 *16
+1867406706 E+07 *18	+3001392722 E+07 *20	+4641422183 E+07 *22		

Nota (sur la lecture des Tableaux 3 et 8) on lira par exemple

(4,0,0,2,2) +4141757812 E+03 *00+2850503906 E+04 *02 etc. . .

comme:

$e'^2 \gamma'^2 \{414,17 \dots + 2850,5 \dots \alpha^2 + \text{etc.} \dots\}$.

L'ensemble (A, B, C, D, E) dans cet ordre a la signification suivante:

A = ordre total = B+C+D+E

B = puissance de e

C = puissance de γ

D = puissance de e'

E = puissance de γ'

Tableau 3B. *Facteur $(1 - \alpha^2)^{-3} \alpha^5 e^3; (1 - \alpha^2)^{-2}$ est en facteur*

(0,0,0,0,0)	-1835449218 E+02 *00	+4182910156 E+02 *02	-2903498840 E+02 *04	+4527377128 E+01 *06
+5337584515 E+00 *08	+1519797593 E+00 *10	+6040652329 E-01 *12	+2893077114 E-01 *14	+1564196312 E-01 *16
+9215017635 E-02 *18	+5788845244 E-02 *20	+3822940902 E-02 *22		
(2,0,0,0,2)	+9177246093 E+02 *00	-4859667968 E+02 *02	-2447521209 E+03 *04	+3615000295 E+03 *06
-1715027899 E+03 *08	+1941364931 E+02 *10	+1738559123 E+01 *12	+3891098055 E+00 *14	+1248419328 E+00 *16
+4930036500 E-01 *18	+2236305241 E-01 *20	+1121401287 E-01 *22		
(2,0,0,2,0)	+3212036132 E+03 *00	-1460439941 E+04 *02	+2518332099 E+04 *04	-2048371047 E+04 *06
+7470504013 E+03 *08	-7257541204 E+02 *10	-5875992083 E+01 *12	-1224105274 E+01 *14	-3722156856 E+00 *16
-1409850136 E+00 *18	-6185525873 E-01 *20	-3018352913 E-01 *22		
(2,0,2,0,0)	+9177246093 E+02 *00	-4859667968 E+02 *02	-2447521209 E+03 *04	+3615000295 E+03 *06
-1715027899 E+03 *08	+1941364931 E+02 *10	+1738559123 E+01 *12	+3891098055 E+00 *14	+1248419328 E+00 *16
+4930036500 E-01 *18	+2236305241 E-01 *20	+1121401287 E-01 *22		
(2,2,0,0,0)	+2827514648 E+02 *00	-1336376647 E+03 *02	+2324321212 E+03 *04	-1892123460 E+03 *06
+6889263690 E+02 *08	-6676478061 E+01 *10	-5391327586 E+00 *12	-1120254791 E+00 *14	-3398157118 E-01 *16
-1284258358 E-01 *18	-5622990817 E-02 *20	-2738724326 E-02 *22		
(4,0,0,0,4)	-1835449218 E+03 *00	-1772326171 E+04 *02	+3460665069 E+04 *04	-1823089373 E+04 *06
-9804476216 E+03 *08	+1512773558 E+04 *10	-5765314944 E+03 *12	+5213514244 E+02 *14	+3789245718 E+01 *16
+7004097285 E+00 *18	+1885548974 E+00 *20	+6334703760 E-01 *22		
(4,0,0,2,2)	-1606018066 E+04 *00	+6729204589 E+04 *02	-4358054756 E+04 *04	-1003922474 E+05 *06
+1941274720 E+05 *08	-1357961088 E+05 *10	+4105267789 E+04 *12	-3307560474 E+03 *14	-2241757314 E+02 *16
-3953505654 E+01 *18	-1028932642 E+01 *20	-3369793307 E+00 *22		

dans le cas de Jupiter perturbé par Saturne, avec les résultats de Izsak. Ces résultats sont en bon accord sur 8 chiffres dans la version où $(1 - \alpha^2)^{-e}$ est en facteur.

4. Méthode pratique de factorisation de $(1 - \alpha^2)^{-e}$

Nous donnerons plus loin quelques indications sur la manière de procéder directement à la construction de la fonction perturbatrice à partir des coefficients de Laplace sous leur forme (11) sans utiliser le développement de Brumberg en α^k sous sa forme (4). Pour le moment nous allons discuter comment ramener la forme (4) à la forme (15) en s'inspirant d'une méthode imaginée par Tisserand (1888). Lorsqu'on a, grâce à la formule (4) réduit le calcul de R à la somme de produits de 4 polynômes. (Il s'agit en fait des coefficients de Hansen et des fonctions F de la formule (9) tronqués à une puissance des petits paramètres.)

$$\alpha^{\lambda} e^{s_1} e'^{s_2} \gamma^{r_1} \gamma'^{r_2} \sum_{i \geq 0} \lambda_i \alpha^{2i} P_1^i(e^2) P_2^i(e'^2) P_3^i(\gamma^2) P_4^i(\gamma'^2) \quad (16)$$

où λ_i est un coefficient numérique, et $P_j^i (j = 1, 2, 3, 4)$ les quatre polynômes, on effectue pour chaque i le produit (17) $T^i = \lambda_i \times P_1^i \times P_2^i \times P_3^i \times P_4^i$ par une méthode de rangement dans un tableau fixe d'exposants ordonnés,

$$\overline{\omega \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4} \quad \omega = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

où les t_i représentent les puissances de e, γ, e', γ' , dans cet ordre; cette méthode est décrite par ailleurs (Kovalevsky, 1968).

On forme ainsi lorsque i varie une suite de tableaux T_i et, pour une caractéristique ε^e donnée soit:

$$\varepsilon^e = e^{s_1} e'^{s_2} \gamma^{r_1} \gamma'^{r_2},$$

$$\varrho = s_1 + s_2 + r_1 + r_2,$$

ε désignant n'importe lequel des petits paramètres, qui sont tous considérés comme du même ordre de grandeur, on rassemble un polynôme en α^2 , soit $\psi(\alpha^2)$

$$\alpha^{\lambda} \psi(\alpha^2)$$

qu'il faut ramener à la forme (14)

$$(1 - \alpha^2)^{-e} \alpha^{\lambda} \phi(\alpha^2).$$

Considérons pour cela

$$\psi(\alpha^2) = \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^{2i}.$$

On pose

$$\delta_1^1 a_1 = a_1 - a_0,$$

$$\delta_i^1 a_i = a_i - a_{i-1}$$

et l'on forme les différences premières, il vient:

$$\psi(\alpha^2) = a_0 + (a_1 - a_0) \alpha^2 + (a_2 - a_1) \alpha^4 + \dots + a_0 \alpha^2 + a_1 \alpha^4 + \dots$$

ou bien avec notre convention d'écriture et,

$$\delta_0^1 a_0 = a_0,$$

$$\psi(\alpha^2) = \sum_{i \geq 0} \delta_2^1 a_i \alpha^{2i} + \alpha^2 \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^{2i},$$

ou bien:

$$\psi(\alpha^2) = (1 - \alpha^2)^{-1} \sum_{i \geq 0} \delta_i^1 a_i \alpha^{2i}.$$

En itérant de la même façon sur la fonction $\sum \delta_i^1 a_i \alpha^{2i}$ on obtient la formule générale:

$$\psi(\alpha^2) = (1 - \alpha^2)^{-n} \sum_{i \geq 0} \delta_i^n a_i \alpha^{2i} \quad (18)$$

où $\delta_0^n a_0 = a_0$ par définition

et,

$$\delta_i^n a_i = \delta_{i-1}^{n-1} a_i - \delta_{i-1}^{n-1} a_{i-1}.$$

L'établissement de cette formule suffit à montrer le procédé de calcul extrêmement simple pour factoriser $(1 - \alpha^2)^{-e}$ une fois qu'on a construit la suite des tableaux T^i , puisqu'il suffit de former les différences $\varrho^{\text{ème}}$ des éléments a_i . A ce sujet, on pourra examiner en détail les résultats du Tableau 3 et se rendre compte que la double précision est parfois nécessaire dans ce procédé, pour les coefficients associés à de faibles caractéristiques ($\varrho \leq 2$) afin de ne pas perdre trop de précision dans les différences successives. On pourra voir en effet qu'à l'étape $\varrho - 1$ des différences on est conduit à faire la différence de deux nombres du même ordre de grandeur.

Indiquons maintenant, sans effectuer toute l'algèbre comment on pourrait procéder pour éviter le développement en α^k de la fonction perturbatrice, et conserver explicitement les coefficients de Laplace, tout en utilisant les deux inclinaisons i et i' des deux planètes. (Ceci est déjà un résultat ancien dans le cas de l'inclinaison mutuelle J .) On se bornera au cas des excentricités nulles, car on sait qu'il est facile de se ramener au cas de non nullité avec l'introduction des coefficients de Hansen $X_q^{k,s}$.

Revenons à la formule (2). Le développement des coefficients de Jacobi en coefficients de Laplace

prend la forme générale suivante :

$$b_{p,q}(\alpha, J) = \sum_n (-1)^n \sigma^{2(q+n)} \sum_{r=0}^n \lambda_{n,r} b_{p+q-2r}^{1/2+q-2r}(\alpha)$$

où $\lambda_{n,r}$ sont des facteurs dépendant de n et r qu'on exprime à l'aide de la fonction Γ . Il reste à expliciter $\sigma^{2(q+n)}$ à l'aide des deux inclinaisons i et i' . Remarquons pour cela que de la formule (3) on tire :

$$\sigma^2 = \frac{1 - \cos J}{2}$$

et avec $q + n = r$ alors,

$$\sigma^{2r} = \frac{1}{2^r} (1 - \cos J)^r. \quad (19)$$

Legendre donne pour une variable μ , le développement de μ^k en polynôme de Legendre $P_s(\mu)$ de degré s dont nous donnons les premiers termes :

$$\mu^k = \frac{k!}{3 \cdots (2k+1)} \left\{ (2k+1) P_k(\mu) + (2k-3) \frac{2k+1}{2} \times P_{k-2}(\mu) + (2k-7) \frac{(2k+1)(2k-1)}{2.4} P_{k-4}(\mu) + \dots \right\}.$$

Si maintenant $f(\mu)$ désigne une fonction développée en puissance de μ soit,

$$f(\mu) = \sum_{i=0} c_i \mu^i,$$

alors $f(\mu)$ peut être développée en polynômes de Legendre avec la formule qui suit (Hobson, 1955) :

$$f(\mu) = \sum_{i=0} b_i P_i(\mu) \quad (20)$$

où

$$b_i = \frac{k!}{1.3.5 \dots (2k-1)} \left\{ c_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2.(2k+3)} c_{k+2} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{2.4(2k+3)(2k+5)} c_{k+4} + \dots \right\}. \quad (21)$$

Si l'on revient à la formule (19) où $\cos J = \mu$, les paramètres c_i sont alors au signe près les coefficients du binôme, et grâce à (20) et (21) on obtient les expressions de $\sigma^{2r} = (\sin J/2)^{2r}$ développées en polynôme de Legendre de $\cos J$. On peut alors appliquer la formule d'addition sur les $P_n(\cos J)$ où $\cos J$ a la valeur donnée par (3).

$$\begin{aligned} P_n(\cos J) &= P_n(\cos i) P_n(\cos i') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos i) P_n^m(\cos i') \\ &\times \cos m(h-h'). \end{aligned} \quad (22)$$

Ainsi l'application de (22) nous permet de développer σ^{2r} en puissance de γ et γ' et des multiples de l'argument $h-h'$ puisque les fonctions de

Legendre associées P_n^m de définition

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

vérifient (Publication CNRS, 1957) :

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(n+m)!}{2^n m! (n-m)!} \\ &F(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-x}{2}) \end{aligned}$$

où F est une fonction hypergéométrique et

$$\frac{1-x}{2} = \frac{1-\cos i}{2} = \gamma^2.$$

En résumé, l'application de ce procédé permettrait de construire un formulaire analogue à celui de Brumberg (avec toutefois un indice de sommation supplémentaire) où les coefficients de Laplace apparaîtraient explicitement, ce qui rendrait possible l'utilisation de la formule (11) et la mise en facteur a priori de $(1-\alpha^2)^{-e}$.

5. Étude des arguments, et limitations en ordre

Grâce aux relations (9) et (10) avec les indices figurant dans la formule (4), on sait quelle caractéristique $\mathcal{C}$ associer à un argument de la forme générale :

$$\phi = ql + q'l' + sg + s'g' + j(h-h') \quad (23)$$

soit

$$\mathcal{C} = e^{|q-s|} e^{|q'-s'|} \gamma^{|s-j|} \gamma'^{|s'+j|}.$$

D'autre part, avec (5) et (6) il nous est possible de calculer pour chaque argument ϕ , une valeur de k , soit $k=\lambda$, minimum du facteur en α . On définit ainsi une nouvelle quantité $\overline{\mathcal{C}}$ telle que :

$$\overline{\mathcal{C}} = \alpha^\lambda \mathcal{C}$$

qui donne une indication de l'ordre de grandeur d'un coefficient quelconque d'un argument de la fonction perturbatrice. A titre d'exemple, quelles limitations donner à la quantité $\overline{\mathcal{C}}$, si on se fixe d'atteindre toutes les inégalités de l'ordre du 1/100e de seconde ? Si l'on opère une analyse harmonique sur la fonction perturbatrice on peut répondre à la question avec une méthode du type de celle imaginée par Petrovskaya (1968). Dans notre cas, où nous nous efforçons d'inclure l'ensemble de toutes les planètes il y a un grand degré d'arbitraire et les coefficients A de la formule (4) peuvent varier très largement suivant le couple des planètes considéré. D'autre part, la méthode de Petrovskaya ne

peut s'appliquer qu'à la fonction perturbatrice et non au résultat de l'intégration.

Cet ordre de grandeur dépend de deux facteurs:

1) la valeur de la caractéristique $\mathcal{C}$ et des coefficients numériques dans A ;

2) la présence éventuelle de petits diviseurs dans la solution.

Examinons ces deux facteurs:

1 — Les polynômes en α^2 , $\phi(\alpha^2)$, croissent très rapidement avec α et même si $\mathcal{C}$ est choisi très petit (par exemple $\alpha^3 \varepsilon^4$) la valeur globale du coefficient peut être encore significative pour des α grands ($\alpha = 0,7$). Il est utile à ce sujet d'examiner sur un exemple dans R , pour des multiples d'un même argument, les valeurs d'un coefficient.

Examinons par exemple la différence des longitudes:

$$A - A' = l + g + h - l' - g' - h'.$$

Pour tout multiple $q(A - A')$ la caractéristique $\mathcal{C}$ est d'après (23)

$$\mathcal{C} = e^0 e'^0 \gamma^0 \gamma'^0 = 1$$

et $\bar{\mathcal{C}} = \alpha^\lambda$ où $\lambda = q$ pour $q \geq 2$.

Dans le cas où $\alpha = 0,54$ (Cas Jupiter perturbé par Saturne), on obtient les résultats suivants:

q	λ	Premier coefficient numérique
0	2	1,09
1	3	$7,5 \cdot 10^{-2}$
2	2	$2,6 \cdot 10^{-1}$
3	3	$1,2 \cdot 10^{-1}$
4	4	$5,7 \cdot 10^{-2}$
5	5	$2,8 \cdot 10^{-2}$
6	6	$1,4 \cdot 10^{-2}$
7	7	$7,1 \cdot 10^{-3}$
8	8	$3,6 \cdot 10^{-3}$
9	9	$1,9 \cdot 10^{-3}$
10	10	$9,7 \cdot 10^{-4}$
11	11	$5,1 \cdot 10^{-4}$

On juge ainsi de la lenteur de décroissance des coefficients du tableau à partir de $q = 2$. Notons que dans le demi-grand axe le dernier terme produit encore une inégalité de l'ordre de 0,3 (voir Le Verrier, p. 127).

2 — Une estimation des coefficients dans la fonction perturbatrice est de toute façon très insuffisante à cause de l'apparition de diviseurs δ dans l'intégration des variables, qui ont la forme suivante:

$$\delta = 1 - g\nu \quad (24)$$

Tableau 4

$\nu = n'/n$	Fractions les plus proches g	Caractéristique la plus faible	Plus petite différence	$ \delta $
Mercure	0,392	3/8	5	0,017
		2/5	3	0,008
	0,241	1/5	4	0,059
		1/4	3	0,009
Vénus	0,128	1/6	5	0,039
		3/5	2	0,015
	0,615	5/8	3	0,010
		1/3	2	0,006
Terre	0,327	2/7	5	0,041
		1/2	1	0,032
	0,532	5/9	4	0,024
		1/6	5	0,083
Mars	0,084			0,496
	0,159	1/6	5	0,008
Jupiter	0,403	2/5	3	0,003
		3/7	4	0,026
	0,141	1/6	5	0,026
Saturne	0,351	1/3	2	0,018
		3/8	5	0,024
	0,179	1/5	4	0,012
		1/6	5	0,021
Uranus	0,510	1/2	1	0,010
		5/9	4	0,046

où $\nu = n'/n$ (rapport des moyens mouvements); g est un rapport de deux entiers.

Les variations de δ^{-1} sont très grandes d'un couple de planète à l'autre. Cette propriété est illustrée dans le Tableau 4. On y voit que pour un grand nombre d'arguments, le coefficient peut être multiplié par 10 ou 100 quand ν varie dans tout l'intervalle, alors qu'il n'existe en fait que peu de diviseurs significatifs (c'est-à-dire associés à des caractéristiques faibles) pour un ν particulier.

Pour les petites inégalités (égales ou inférieures à 0,01) il serait illusoire de vouloir les obtenir pour toutes les planètes car il faudrait alors introduire un très grand nombre d'arguments dont finalement un très faible pourcentage contribuerait à l'étude d'un couple particulier. D'un point de vue pratique il faut imaginer, dans ce type de théorie à caractère littéral, pouvoir compléter les résultats avec des séries de Fourier à coefficients numériques représentant les petites inégalités manquantes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de pouvoir construire les inégalités aussi bien au premier qu'au second ordre, argument par argument, et non de façon globale afin

de nous laisser la possibilité de pouvoir ajouter à un ensemble construit arbitrairement les inégalités manquantes.

Afin d'établir une liste d'arguments à «caractéristiques croissantes», nous avons procédé de la manière suivante: soit une caractéristique

$$\mathcal{C} = e^{|q-s|} e^{|q'-s'|} \gamma^{|s-j|} \gamma'^{|s'+j|}$$

$$\begin{cases} |q-s| = r_1 \\ |q'-s'| = r_2 \\ |s-j| = r_3 \\ |s'+j| = r_4 \end{cases} \quad (25)$$

et

$$\omega = r_1 + r_2 + r_3 + r_4. \quad (26)$$

On commence par faire varier ω à partir de 0. A ω fixé on considère toutes les combinaisons possibles des exposants r_1, r_2, r_3 et r_4 . Pour chaque combinaison r_i fixée, on fait progresser j de 0 à une valeur maximale j_{MAX} , de façon à satisfaire (25) et (26). Il est facile de voir, d'après les relations (5) et (6), que dès que j est grand on a $\lambda = j$, à deux unités près. Lorsque ω croît il n'est pas nécessaire de conserver pour j_{MAX} la même valeur. Nous avons choisi la relation suivante:

$j_{\text{MAX}} = N - 2\omega$ (N quelconque, donné une fois pour toutes).

N représente la précision cherchée. La relation donnant j_{MAX} signifie que lorsque l'ordre ω de la caractéristique $\mathcal{C}$ augmente, l'ordre en λ dans $\mathcal{C}$ du facteur α^λ peut diminuer sans affecter la précision du résultat. Ceci, «grosso modo», nous fait perdre deux ordres en α quand ω augmente de 1. Donnons une illustration du nombre n d'arguments construits avec cette méthode.

$N = 14$	$\omega \leq 6$	$n = 2801$
ω	n	
0	15	
1	50	
2	168	
3	374	
4	624	
5	810	
6	760	
Total		2801
$N = 8$	$\omega \leq 4$	$n = 264$

Afin de faciliter la comparaison, faisons $r_4 = 0$ ce qui revient à rechercher les perturbations à $\gamma' = 0$.

$$\begin{aligned} N = 8 & \quad \omega \leq 4 & \quad n = 147 \\ N = 10 & \quad \omega \leq 4 & \quad n = 285^1) \\ N = 12 & \quad \omega \leq 6 & \quad n = 590 \end{aligned} \quad (27)$$

Avec l'hypothèse d'une inclinaison nulle (ou ce qui revient au même de l'inclinaison mutuelle à la place de i et i') le nombre d'arguments est approximativement divisé par 3 dans notre construction. Nous nous servons de cette propriété plus loin. Nous verrons aussi comment introduire une notion d'ordre pour les diviseurs et ainsi modifier la liste des arguments.

6. Les variables elliptiques et le programme de calcul

Ecrivons directement le système des équations de Lagrange appliqué à un terme quelconque $A \cos \phi$ de la fonction perturbatrice $R = \sum_i A_i \cos \phi_i$, avec des variables:

$$\lambda = l + g + h; \quad \varpi = g + h \quad \text{et } h$$

où ϕ a la forme (23).

$$\text{On a: } \frac{da}{dt} = -2 \frac{q}{na} A \sin \phi,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left\{ -\frac{2}{na} \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{1}{na^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)}{e} \frac{\partial A}{\partial e} + \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right) \right\} \cos \phi,$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \left\{ q \frac{1-e^2-\sqrt{1-e^2}}{e} + (q-s) \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right\} A \sin \phi,$$

$$e \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2} \quad (28)$$

$$\cdot \left\{ \sqrt{1-e^2} \frac{\partial A}{\partial e} + \frac{\gamma e}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right\} \cos \phi,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4n a^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ -\frac{s-j}{\gamma} + 2s\gamma \right\} A \sin \phi,$$

$$\gamma \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial A}{\partial \gamma} \cos \phi.$$

Dans ces expressions il faut imaginer que A a la formulation (16). C'est sans doute l'utilisation directe

¹⁾ Nous appellerons par la suite cette liste, la liste (Z). Un échantillon voisin de cette liste est donné dans le Tableau 5, en y groupant tous les multiples de la forme $q\lambda + q'\lambda'$ (voir chapitre B1).

de ce formulaire qui nous permettra d'économiser les calculs au maximum, grâce à la forme d'un terme quelconque de la fonction perturbatrice, somme d'un produit de quatre polynômes en e , e' , γ et γ' respectivement. Au niveau des variables il suffit d'appliquer à la suite des tableaux T^i (17) les opérations suivantes:

a) ou bien dans chaque tableau:

— dérivation par rapport à e ou γ d'un P_j^i ,
— multiplication par un polynôme en e^2 ou γ^2 d'un P_j^i , à un facteur près qui peut être déterminé a priori et qui, comme on le verra, servira à modifier la caractéristique de A .

b) ou bien dans la suite des T^i :

— changement de λ_i en $k \times \lambda_i$ à cause de la dérivée $\partial A / \partial a$, k allant de 2 en 2 à partir de sa valeur minimum.

De ces remarques découlent les principes de programmation très simples de l'ensemble des Eq. (28) pour chaque argument ϕ de R .

1 — On calcule la suite des T^i .

2 — On fabrique une suite T'^i modifiée par les opérations de dérivation et de multiplication.

3 — On range les résultats dans un tableau fixe dont nous avons parlé plus haut.

4 — On met en facteur $(1 - \alpha^2)^{-e}$. C'est de la détermination de ϱ dont nous allons parler maintenant.

Avec la formulation (15) un terme A peut s'écrire dans R :

$$A = \frac{\varepsilon^r}{(1 - \alpha^2)^r} B; \quad B = \alpha^{\lambda} \sum_{i=0} \frac{\varepsilon^{2i}}{(1 - \alpha^2)^{2i}} P_{2i}(\alpha^2). \quad (29)$$

L'écriture de B exige que $i = 0$ existe. Sinon on change dans A , r en $r + 2$. ε^r est la caractéristique. On a toujours $\varrho = r$. Il n'en est plus de même avec les éléments à cause des dérivations et des divisions par e ou γ . Désignons par x une variable métrique quelconque et par η^p la caractéristique dont x est exclu. Soit enfin la notation:

$$a[i] = \sum_{s=0} \frac{P_{i+2s}(\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^{i+2s}} \eta^{2s}$$

alors

$$A = \frac{\eta^p}{(1 - \alpha^2)^r} \{a[0]x^q + a[2]x^{q+2} + \dots\} \quad (30)$$

avec $p + q = r$

(30) signifie simplement qu'on a ordonné A par rapport à x . On a:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\eta^p}{(1 - \alpha^2)^r} \{q a[0]x^{q-1} + (q+2)a[2]x^{q+1} + \dots\}. \quad (31)$$

Il y a deux cas possibles:

a) $q = 0$, alors $p = r$ et (31) montre que:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\varepsilon^{r+1}}{(1 - \alpha^2)^{r+2}} B'$$

où B' a toujours la forme (29);

b) $q \neq 0$, il vient:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\varepsilon^{r-1}}{(1 - \alpha^2)^r} B'.$$

Enfin dans le cas d'une dérivation par rapport à α il est évident que l'on a:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon^r}{(1 - \alpha^2)^{r+1}} B''.$$

Ces remarques nous permettent avec les valeurs des entiers qui rentrent dans (23) et (28) d'expliciter la correspondance entre le type de variable envisagé et ϱ . Partant de A , écrivons de façon générale le résultat pour une variable y quelconque.

$$\Delta y = \frac{\varepsilon^r}{(1 - \alpha^2)^e} B.$$

Pour simplifier c'est le couple (r', ϱ) que nous avons fait rentrer dans le Tableau ci-dessous:

	$q - s = 0$	$q - s \neq 0$	$s - j = 0$	$s - j \neq 0$
Δa	(r, r)	(r, r)	(r, r)	(r, r)
$\Delta \lambda$	$(r, r + 1)$	$(r, r + 1)$	$(r, r + 1)$	$(r, r + 1)$
Δe	$(r + 1, r)$	$(r - 1, r)$	(r, r)	(r, r)
$\Delta \gamma$	(r, r)	(r, r)	$(r + 1, r)$	$(r - 1, r)$
$\Delta \varpi$	$(r, r + 2)$	$(r - 2, r)$	$(r - 1, r)$	$(r - 1, r)$
Δh	$(r - 1, r)$	$(r - 1, r)$	$(r, r + 2)$	$(r - 2, r)$

Nous avons écrit un programme de construction des Δy qui permet d'atteindre n'importe quel argument pour une caractéristique inférieure ou égale à 7, ce qui suppose un développement de R jusqu'à l'ordre 9 inclus. Ce programme est en simple précision (8 chiffres). Il conserve pour le $P(\alpha^2)$ 12 termes à l'ordre 0 ou 1, 10 termes à l'ordre 2 ou 3 et ainsi de suite en diminuant de 2 le nombre de termes ce qui donne une précision interne suffisante pour la simple précision. A ce programme sont adjoints deux programmes de substitution numérique l'un pour α et l'autre pour l'ensemble des variables métriques.

A titre d'illustration du calcul complet du premier ordre, en simple précision nous donnons dans le tableau 8, un résultat uniquement pour l'argument $\phi = h - h'$, de la fonction perturbatrice dans

l'équation $e \frac{d\varpi}{dt}$. On jugera sur ce résultat de l'allure des coefficients et de la manière dont se forment les arrondis dans le programme de calcul en simple précision. La dimension des polynômes en α^2 dépend de la caractéristique ε^s . Pour la lecture du Tableau 8, on se référera au nota du Tableau 3. En facteur du Tableau 8 on a, $(1 - \alpha^2)^{-4} \alpha^2 e \gamma \gamma'$.

B. Le second ordre

1. Les diviseurs

Les seconds membres σ des équations de Lagrange (28) pour un couple de deux planètes sont des fonctions qui s'écrivent :

$$\sigma = f(e, e', \gamma, \gamma', a, a', n, n'; \phi) \quad (32)$$

où ϕ est un argument de la forme (23). Les demi-grands axes et les moyens mouvements sont liés par les relations :

$$n^2 a^3 = f(1 + m) ; \quad n'^2 a'^3 = f(1 + m').$$

On a trouvé au premier ordre des expressions de la forme :

$$e = e_0 + m' \Delta_1 e ; e' = e'_0 + m \Delta_1 e' ; \lambda = \lambda_0 + n_0 t + m' \Delta_1 \lambda \quad (33)$$

avec des conventions d'écriture analogues pour les autres variables. Les Δ_1 renferment ici les portions séculaires et périodiques du premier ordre. On a mis les masses m et m' en facteur, afin de faire la distinction entre les perturbations par une planète extérieure (m') sur une planète intérieure (m) et le cas contraire.

Il s'agit d'opérer sur les fonctions (32) les accroissements (33) pour obtenir le second ordre :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \sigma = m' & \left(\frac{\partial f}{\partial e} \Delta_1 e + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \Delta_1 \gamma + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta_1 a + \frac{\partial f}{\partial n} \Delta_1 n \right. \\ & + \left. \frac{\partial f}{\partial \phi} \Delta_1 \phi \right) + m \left(\frac{\partial f}{\partial e'} \Delta_1 e' + \frac{\partial f}{\partial \gamma'} \Delta_1 \gamma' + \frac{\partial f}{\partial a'} \Delta_1 a' \right. \\ & + \left. \frac{\partial f}{\partial n'} \Delta_1 n' + \frac{\partial f}{\partial \phi'} \Delta_1 \phi' \right) \end{aligned} \quad (34)$$

où l'on a représenté par la notation condensée :

$$\begin{aligned} m' \frac{\partial f}{\partial \phi} \Delta_1 \phi &= m' \left(\frac{\partial f}{\partial \varpi} \Delta_1 \varpi + \frac{\partial f}{\partial h} \Delta_1 h + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta_1 \lambda \right) \\ \text{et} \\ m \frac{\partial f}{\partial \phi'} \Delta_1 \phi' &= m \left(\frac{\partial f}{\partial \varpi'} \Delta_1 \varpi' + \frac{\partial f}{\partial h'} \Delta_1 h' + \frac{\partial f}{\partial \lambda'} \Delta_1 \lambda' \right). \end{aligned}$$

Dans $\Delta_2 \sigma$ les dérivations par rapport à n ou n' ne sont faites que lorsque ces quantités apparaissent

explicitement dans σ , c'est-à-dire lorsque dans la formule (28) on a conservé n à travers les fractions $1/na^2$.

A cause de la dissymétrie dans l'expression de la fonction perturbatrice dans le cas d'une planète intérieure perturbée par une planète extérieure nous faisons apparaître deux types de perturbations, l'une en m'^2 l'autre en mm' . Dans le cas d'une planète extérieure perturbée par une planète intérieure on aura les deux types en m^2 et mm' . Toutes ces perturbations doivent être séparées dans le cas d'une théorie littérale. S'il s'agit d'une théorie complète du second ordre il faut ajouter en plus toutes les perturbations en mm'' et $m'm''$ dues à un troisième corps P'' , qui sont de nature différente de celles en mm' puisqu'elles sont alors fonctions de 9 paramètres métriques au lieu de 6, et de même pour les variables angulaires.

En désignant par P , P' et P'' 3 planètes s'écartant dans cet ordre du Soleil, il faudra considérer les perturbations suivantes : (la flèche indique la perturbation).

- 1 $P \rightarrow P' \rightarrow P''$,
- 2 $P \rightarrow P'' \rightarrow P'$,
- 3 $P' \rightarrow P'' \rightarrow P$,
- 4 $P' \rightarrow P \rightarrow P''$,
- 5 $P'' \rightarrow P' \rightarrow P$,
- 6 $P'' \rightarrow P \rightarrow P'$.

2 et 3 sont de même nature, ainsi que 4 et 6. Ainsi dans le cas de 3 planètes il y a au total 4 théories à distinguer, les perturbations pour un couple s'y ramenant à condition de faire coïncider P avec P' ou P' avec P'' .

Pour simplifier notre étude, dans une première approche du problème, nous nous sommes placés dans le cas d'un couple de planètes et avons recherché les perturbations en m'^2 qui sont sans doute les plus simples à calculer, avec celles en m^2 parce qu'elles nécessitent qu'un seul type d'équations telles que (28). C'est le cas de l'action dite «réciproque» d'une planète intérieure perturbée par une planète extérieure. Dans cette hypothèse, nous ne considérerons plus que la première parenthèse de la formule (34).

Nous avons vu au § (A - 5) comment construire une liste d'arguments dans laquelle figurent toutes les inégalités de la théorie du premier ordre. Comme dans le cas où les deux inclinaisons sont conservées (γ et γ') cette liste est longue (de 2000 à 3000 argu-

ments) nous avons choisi de faire $\gamma' = 0$, afin de nous permettre de faire un travail complet avec le matériel électronique dont nous disposons. Remarquons que les résultats trouvés, avec cette limitation, dans un cas où nous ne considérons pas les accroissements en $\Delta_1 \gamma'$, ont une interprétation physique utile:

Il s'agit alors de perturbations rapportées, non pas à un plan fixe, mais au plan mobile de l'orbite osculatrice de la planète perturbatrice. Dans la formule $\gamma = \sin i/2$, i joue alors le rôle d'une inclinaison mutuelle.

Après l'intégration des Eqs. (28) les accroissements $\Delta_1 x$ où x désigne n'importe laquelle des variables sont alors des séries de la forme:

$$\Delta_1 x = Ut + \sum_i \frac{V_i}{qn + q'n'} \cos \phi_i$$

à l'exclusion de la longitude λ où l'intégrale $\int n dt$

introduit alors des termes tels que $\frac{V_i}{(qn + q'n')^2}$. Les U

et V_i sont des polynômes des cinq variables α , e , γ , e' et γ' . Que faire des diviseurs $(qn + q'n')$? ou sous leur formulation (24)

$$\delta = 1 - g\nu.$$

Il n'est évidemment pas question ici de développer les fractions $(1 - g\nu)^{-1}$ ou $(1 - g\nu)^{-2}$ en puissance de ν ou en puissance fractionnaire de α , en utilisant la relation:

$$\nu^2 \alpha^{-3} = \frac{1 + m'}{1 + m}.$$

En effet, suivant les valeurs que peut prendre ν , $(1 - g\nu)$ peut s'annuler, et ces développements n'auraient pas de sens. Il n'est pas d'autre part possible de conserver tous les dénominateurs $(1 - g\nu)$ à cause du grand nombre de valeurs fractionnaires que peut prendre g . Il faut donc trouver une solution qui nous permette à la fois de représenter l'ensemble des planètes et de tenir une place minimum pour son utilisation future dans un traitement global. Nous allons examiner pour cela l'ensemble des diviseurs rencontrés dans une liste d'arguments construits avec le procédé décrit au § (A - 5), dans le cas particulier $N = 12$ $\omega \leq 6$ (liste Z) dont un extrait est donné dans le Tableau 5. Nous avons rassemblé dans ce tableau les différentes combinaisons $qn + q'n'$ à un multiple entier près. On désigne par ω_m l'ordre minimum d'un coefficient attaché à cet argument. P est le nombre d'arguments pour le couple (q, q') avec les caractéristiques d'ordre $\omega \geq \omega_m$.

Tableau 5

n°	q	q'	ω_m	P	n°	q	q'	ω_m	P
1	0	0	0	6	31	4	-1	3	10
2	0	1	1	44	32	4	1	5	10
3	1	-6*	5	2	33	5	-8*	3	2
4	1	-5*	4	7	34	5	-7	2	5
5	1	-4*	3	8	35	5	-6	1	4
6	1	-3*	2	13	36	5	-4	1	10
7	1	-2*	1	28	37	5	-3	2	7
8	1	-1	0	63	38	5	-2	3	10
9	1	0	1	54	39	5	-1	4	11
10	1	1	2	20	40	5	1	6	3
11	1	2	3	11	41	6	-7	1	3
12	1	3	4	10	42	6	-5	1	5
13	1	4	5	6	43	6	-1	5	6
14	1	5	6	1	44	7	-9	2	2
15	2	-7*	5	1	45	7	-8	1	3
16	2	-5*	3	7	46	7	-6	1	5
17	2	-3*	1	17	47	7	-5	2	6
18	2	-1	1	33	48	7	-4	3	5
19	2	1	3	14	49	7	-3	4	5
20	2	3	5	9	50	7	-2	5	3
21	3	-7*	4	2	51	8	-9	1	2
22	3	-5*	2	6	52	8	-7	1	4
23	3	-4	1	13	53	8	-5	3	4
24	3	-2	1	17	54	9	-10	1	2
25	3	-1	2	16	55	9	-8	1	2
26	3	1	4	10	56	9	-7	2	3
27	3	2	5	11	57	10	-11	1	1
28	4	-7*	3	4	58	10	-9	1	2
29	4	-5	1	9	59	11	-10	1	1
30	4	-3	1	12					

Nous avons marqué d'une astérisque (*) tous les diviseurs qui annulent δ dans l'intervalle $0 \leq \nu \leq 0,67$. En effet, pour la valeur maximum de ν dans le système solaire (dans le cas Vénus-Terre) où $\nu = 0,615$ alors:

$$q - q'\nu = 2 - 3 \times 0,615 = 0,016 = q\delta$$

Pour des valeurs de q/q' extérieures à l'intervalle $[0; 0,67]$ on a toujours, quel que soit ν :

$$\delta = 1 - g\nu > 0,02. \quad (35)$$

On a vu ainsi que parmi les 59 diviseurs du Tableau 5 on peut en isoler 12 seulement pour lesquels l'inégalité (35) n'est pas remplie, ou si l'on veut, qui s'annulent dans l'intervalle utile de ν . Comme on peut se rendre compte sur le Tableau 4 que de nombreux diviseurs ont un ordre de grandeur comparable à la valeur des excentricités ou des inclinaisons (et sont parfois même dix fois plus petits) il nous est apparu essentiel de modifier notre notion d'ordre, lorsqu'il apparaît des diviseurs δ ,

en considérant que

$$\frac{\varepsilon^\omega}{\delta} = O(\varepsilon^{\omega-1})$$

si δ rentre dans la liste des 12 petits diviseurs rencontrés.

Par la suite, nous envisagerons de bâtir une théorie complète à l'ordre 3 des petits paramètres métriques (e et γ). Nous conserverons alors les termes d'ordre 4 et 5 dans le cas où il existe un diviseur dans un terme de $\Delta_1 x$ ou, s'il en apparaît un nouveau dans l'intégration du second membre σ . Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Nous avons modifié la liste d'arguments et avons obtenu une nouvelle liste de 518 arguments du même type. Nous avons admis deux ordres supplémentaires en λ pour le facteur α^λ , chaque fois que q/q' est dans l'intervalle utile $[0; 0,67]$. Il est évident que dans un programme de calcul plus important ce saut de deux ordres devrait être augmenté (par exemple 4 ou 6). En effet, pour illustrer la lacune de notre procédé, disons qu'on n'atteint pas de cette façon, les multiples de la grande inégalité de Jupiter-Saturne $4n - 10n'$ et au-delà ($\lambda > 6$). Cependant, grâce à ce saut de 2 unités on fait déjà apparaître trois nouveaux petits diviseurs qui viennent s'ajouter à la liste précédente

$$(q, q') = (3, -8); (4, -9); (5, -9).$$

2. Représentation du second ordre

D'après tout ce que nous avons vu jusqu'à présent, formellement les seconds membres σ se représentent par des séries de Fourier d'argument ϕ_i ou par des termes séculaires, où les coefficients ont la forme :

$$\sum_{\omega, j} \frac{\alpha^\lambda \omega}{(1 - \alpha^2)^{2\omega}} \frac{P_\omega(\alpha^2)}{\delta_j^p} \varepsilon^\omega \quad (36)$$

où p prend les valeurs 1 (ou 2 pour la longitude seulement).

L'indice j dans δ_j se rapporte au diviseur $qn + q'n'$, c'est-à-dire à un couple (q, q') particulier, où q et q' sont premiers entre eux, contribuant à la construction d'un ϕ_{i_0} .

Dans les hypothèses de notre travail il faut, pour représenter convenablement un polynôme P_ω , de 6 à 12 termes, (suivant la valeur de ω) et il entre 30 à 40 diviseurs dans la série (36), c'est-à-dire 30 à 40 valeurs de j . Il faudrait de l'ordre de 200 à 500 termes pour représenter (36) pour une caractéristique donnée, et pour un argument particulier. Une telle repré-

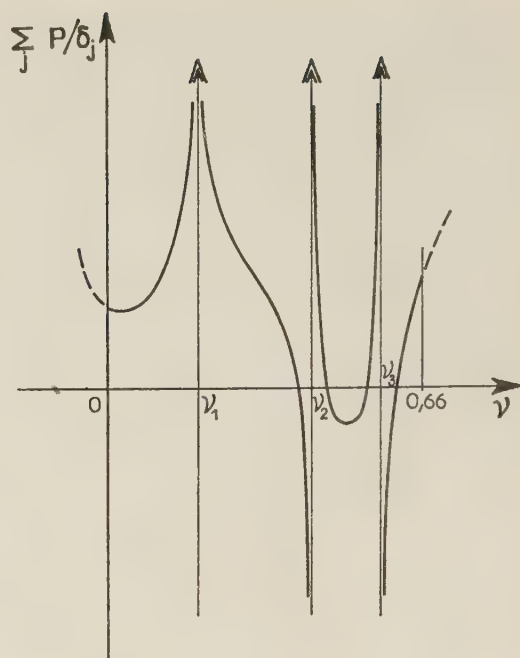


Fig. 3

sentation est inacceptable. Pour que des expressions de ce type restent valables, il faudrait diviser au moins par un facteur 10 le nombre de termes. D'autre part, il n'est pas non plus possible de représenter en bloc $\sum_j \frac{P_\omega(\alpha^2)}{\delta_j^p}$ pour un ω donné par un polynôme

d'interpolation car dans l'intervalle possible de ν , cette fonction prend un grand nombre de fois la valeur infinie. A titre d'illustration $\sum_j \frac{P_\omega(\alpha^2)}{\delta_j^p}(\alpha^2)$ avec 3 valeurs de j , a une représentation graphique donnée dans la Fig. 3. Nous avons alors pensé

approcher la fonction $\sum_j \frac{P_\omega(\alpha^2)}{\delta_j^p}$ dans l'intervalle utile par une expression de la forme suivante

$$\sum_j \frac{P_\omega}{\delta_j^p} = \chi_\omega(\alpha^2) + \sum_i \frac{r_i^\omega}{(1 - g_i \nu)^p} \quad (37)$$

où les r_i sont des nombres et $\chi_\omega(\alpha^2)$ est un polynôme

d'interpolation. Les fractions $\frac{r_i^\omega}{(1 - g_i \nu)^p}$ traduisent les discontinuités de (36) aux points $\nu_i = 1/g_i$.

Comme la partie utile de la fonction se limite à $\nu \in [0; 0,66]$ il est inutile de conserver tous les diviseurs $1 - g_i \nu$ mais seulement ceux qui s'annulent dans l'intervalle. (C'est-à-dire une quinzaine pour l'ensemble des arguments comme nous avons vu

plus haut.) On fait rentrer les autres quantités $\frac{r_i}{(1-g_i)^p}$ dans les valeurs du polynôme d'interpolation $\chi_\omega(\alpha^2)$.

Cherchons maintenant comment définir le polynôme d'interpolation $\chi_\omega(\alpha^2)$. Nous avons choisi la méthode sans doute la plus directe en prenant pour $\chi_\omega(\alpha^2)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction $f(\alpha^2)$ réelle à approximer, définie en n points $(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{n-1}^2)$ avec :

$$\begin{aligned} \chi_n(\alpha^2) = & f(\alpha_0^2) + (\alpha^2 - \alpha_0^2) f(\alpha_0^2, \alpha_1^2) \\ & + (\alpha^2 - \alpha_0^2) (\alpha^2 - \alpha_1^2) f(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2) \\ & + \dots \\ & + (\alpha^2 - \alpha_0^2) (\alpha^2 - \alpha_1^2) \dots (\alpha^2 - \alpha_{n-1}^2) \\ & \times f(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2) \end{aligned} \quad (38)$$

où par convention d'écriture les $f(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_i^2)$ sont les différences divisées de f .

$$f(\alpha_0^2, \alpha_1^2) = \frac{f(\alpha_1^2) - f(\alpha_0^2)}{\alpha_1^2 - \alpha_0^2}.$$

La $n^{\text{ième}}$ différence divisée est définie par récurrence :

$$f(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2) = \frac{f(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{n-1}^2) - f(\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-2}^2)}{\alpha_{n-1}^2 - \alpha_0^2}.$$

L'erreur commise dans une telle approximation est E :

$$E = \frac{(\alpha^2 - \alpha_0^2) (\alpha^2 - \alpha_1^2) \dots (\alpha^2 - \alpha_n^2)}{(n+1)!} f^{n+1}(\eta)$$

où η appartient à l'intervalle $[\alpha_i^2, \alpha_j^2]$ α_i^2 et α_j^2 désignant des valeurs extrêmes de l'intervalle de α^2 , f^{n+1} est la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de f .

Nous avons été conduits à conserver *analytiquement* dans (36) la partie $\alpha^3 \omega (1 - \alpha^2)^{-3\omega}$. C'est alors $P_\omega(\alpha^2)$ que nous approchons par une fonction de α^2 et non de α ce qui nous permet de réduire le nombre de termes dans le polynôme $\chi_n(\alpha^2)$. D'autre part les dérivées $(n+1)^{\text{ème}}$ de $P_\omega(\alpha^2)$ sont beaucoup plus petites que celle de $f_\omega(\alpha) = \frac{\alpha^3 \omega}{(1 - \alpha^2)^{3\omega}} P_\omega(\alpha^2)$.

Les expériences numériques que nous avons tentées ont clairement montré que les fonctions $P_\omega(\alpha^2)$ pouvaient être approchées avec une erreur E beaucoup plus petite que pour $f_\omega(\alpha)$, avec un nombre égal de points. Il suffira pour s'en convaincre de se reporter au Tableau 6 dont la description est donnée plus bas : On multipliera la fonction P_ω par son facteur $\frac{\alpha^3}{(1 - \alpha^2)^6}$ et l'on obtiendra un tableau de

différences beaucoup plus grandes que celles du Tableau 6.

Après l'examen d'un grand nombre de fonctions $P_\omega(\alpha^2)$ rentrant dans les coefficients des $\Delta_1 x$, nous avons fixé $n = 8$. Nous atteignons alors une précision interne suffisante dans l'évaluation d'un $P_\omega(\alpha^2)$, compte tenu que les calculs ont été entrepris en simple précision et qu'il existe des erreurs de troncature dans l'évaluation analytique des $P_\omega(\alpha^2)$. On a trouvé qu'en général quel que soit α dans l'intervalle $[0; 0,72]$ on avait toujours

$$\frac{P_\omega(\alpha^2) - \chi_8(\alpha^2)}{P_\omega(\alpha^2)} < 10^{-6} \text{ ou } 10^{-7}.$$

En revenant à la représentation de la formule (37), même en conservant de l'ordre de 20 nombres r_i et avec les 8 points de $\chi_n(\alpha^2)$, on voit que les $\sum_j \frac{P_\omega}{\delta_j^p}$ auront alors une forme suffisamment dense pour permettre des manipulations ultérieures.

Nous illustrons par un exemple dans le Tableau 6 l'allure d'une fonction $P_\omega(\alpha^2)$, pour des valeurs équidistantes de α^2 (pas = 0,07) depuis $\alpha^2 = 0$ jusqu'à $\alpha^2 = 0,49$.

Nous donnons aussi les différences premières (δ^1) secondes (δ^2) etc. ... pour cette fonction dont on s'écarte au maximum de $\Delta \alpha^2 = 0,035$ en dehors des points calculés. Cette fonction est issue de l'argument $l - l' + g - g' + (h - h')$ dans le développement de $e \Delta_1 \varpi$.

P_ω a pour facteur :

$$\frac{\alpha^3}{(1 - \alpha^2)^6} e^5.$$

L'examen des différences 7 èmes de P_ω montre qu'elles recommencent à croître (elle a été choisie dans ce but). Ce phénomène est dû aux erreurs d'arrondi et à la troncature commise dans l'évaluation analytique de $\phi(\alpha^2)$ par le procédé du § (A - 4) où l'on met en facteur $(1 - \alpha^2)^{-6}$.

Compte tenu que la caractéristique associée (ε^5) est élevée, il n'est pas nécessaire d'avoir autant de précision sur P_ω que sur une autre fonction correspondant à une caractéristique plus petite. Il est remarquable que dans ce cas les erreurs d'arrondis sont beaucoup plus faibles. Ceci est un phénomène général que nous avons déjà annoncé plus haut.

3. Construction des Eqs. (34)

Au départ de la construction du second ordre, nous disposons des seconds membres σ des équations de Lagrange (28) sous leur forme analytique en α ,

Tableau 6. P_ω

α^2	$P_\omega(\alpha^2)$	$\delta^1 10^{-1}$	$\delta^2 10^{-1}$	$\delta^3 10^{-3}$	$\delta^4 10^{-5}$	$\delta^5 10^{-6}$	$\delta^6 10^{-6}$
0,000	0,14843739	-1,8978480					
0,07	-0,04134741		1,4252682				
		-0,4725798		4,29082			
0,14	-0,08860539		1,4681764		10,720		
		+0,9955966		4,39802		-7,94	
0,21	-0,01095427		1,5121566		9,926		4,93
		2,5077532		4,49728		-3,01	
0,28	0,26172959		1,5571388		9,625		-6,49
		4,0648920		4,59353		-9,50	
0,35	0,66821879		1,6030741		8,675		
		5,6679661		4,68028			
0,42	1,2350154		1,6498769				
		7,3178430					
0,49	1,9667997						

ainsi que par intégration, des accroissements $\Delta_1 x$. Nous avons à former les quantités figurant dans (39) et ayant la forme suivante:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \Delta_1 x. \quad (39)$$

On calcule dans celles-ci les fonctions $P_\omega(\alpha^2)$ en huit points judicieusement répartis. Représentons schématiquement ces fonctions de la manière suivante, pour un couple d'argument choisi dans $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ et $\Delta_1 x$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sum_{\omega} \frac{\alpha^{\lambda_{\omega}}}{(1 - \alpha^2)^{s_{\omega}}} P_{\omega}(\alpha^2) \varepsilon^{\omega} \quad (a)$$

et dans les variables $\Delta_1 x$ où s'introduisent les dénominateurs:

$$\Delta_1 x = \sum_{i, \omega} \frac{\alpha^{\lambda'_{\omega}}}{(1 - \alpha^2)^{s'_{\omega}}} \frac{Q_{\omega}(\alpha^2)}{(1 - g_i v)^p} \varepsilon^{\omega}. \quad (b)$$

Les λ'_{ω} et s'_{ω} sont ainsi notés pour rappeler que l'on a éventuellement calculé ces quantités à des ordres différents. En particulier, les relations qui associent ω à s_{ω} sont différentes suivant qu'il s'agit d'une variable $\Delta_1 x$ ou de la dérivée d'un second membre $\partial \sigma / \partial x$. Pour construire les expressions (39) il s'agira d'effectuer des opérations d'additions et de multiplications entre (a) et (b). Pour un argument et une caractéristique donnés, il faudra finalement mettre le résultat de ces opérations sous la forme suivante:

$$\sum_{\omega} \frac{\alpha^{\lambda'_{\omega}}}{(1 - \alpha^2)^{s'_{\omega}}} \left\{ \chi_{\omega}(\alpha^2) + \sum_i \frac{r_i^{\omega}}{(1 - g_i v)^p} \right\} \varepsilon^{\omega}. \quad (c)$$

Une fois que g_i et ω sont fixés, on devra réduire (a) $\times$ (b) ou (a) + (b) à:

$$\frac{r_1^{\omega}}{1 - g_1 v} + \frac{r_2^{\omega}}{(1 - g_1 v)^2} + \left\{ \chi_{\omega}(\alpha_0), \chi_{\omega}(\alpha_1), \dots, \chi_{\omega}(\alpha_7) \right\}.$$

Dans cette formule si $p = 1$, $r_2^{\omega} = 0$.

A chaque nouveau g_i on fera la même réduction. En conclusion il nous restera le polynôme d'interpolation $\{\chi(\alpha_0), \dots, \chi(\alpha_7)\}$ et les fractions $\frac{r_i}{(1 - g_i v)^p}$ pour chaque g_i .

Comment opérer cette réduction?

Considérons d'abord le cas $p = 1$. Deux cas peuvent alors se présenter:

1) Ou bien g_i n'est pas dans la liste de nos «petits diviseurs», dans le sens cité plus haut, c'est-à-dire que $1/g_i$ n'est pas dans l'intervalle $[0; 0,66]$. Dans ces conditions on calcule $Q_{\omega}(\alpha_j^2) (1 - g_i v_j)^{-1}$ où v_j est la valeur correspondant à α_j par la relation $v_j^2 \alpha_j^{-3} = 1$.

Au second ordre des masses on peut en effet supposer que $\frac{1 + m'}{1 + m} = 1$; m et m' ne doivent être conservés dans cette relation qu'au troisième ordre des masses. On voit là, qu'il y a un grand degré d'arbitraire dans le choix de la liste des «petits diviseurs», qui dépend de la précision exigée sur les résultats. Il est clair en effet, que plus «l'intervalle maximum des diviseurs» sera élargi, plus il faudra conserver de diviseurs sous leur forme analytique $(1 - g_i v)$, mais aussi les fonctions $\chi(\alpha)$ se rapprocheront plus de la forme des fonctions $\phi(\alpha)$ dans «l'intervalle utile» de v $[0; 0,66]$, dont on sait qu'elles

sont bien représentées par un polynôme en 8 points. L'erreur maximum commise sur les fonctions χ par rapport aux fonctions ϕ est proportionnelle à $f^{(9)}$ ou encore à $(1 - g_i v_M)^{-9}$ où v_M est la valeur maximum de v , d'après la formule donnant l'erreur E dans l'approximation de Lagrange.

2) Ou bien $(1 - g_i v)$ est un petit diviseur. Etudions donc comment passer de la forme (b) à la forme (c). Lorsque $v_g = 1/g_i$ désignons par α_g la valeur correspondante de α .

$$\alpha_g = g_i^{-2/3}.$$

On a, en faisant l'ensemble des produits de (a) par (b) donnant l'ordre ω pour un α_j particulier:

$$\sum_{\omega_1} \frac{P_{\omega_1} Q_{\omega - \omega_1}}{(1 - g_i v)} = \frac{\phi(\alpha_j)}{1 - g_i v} = \frac{\phi(\alpha_j) - \phi(\alpha_g)}{1 - g_i v} + \frac{\phi(\alpha_g)}{1 - g_i v}.$$

a) Si $\alpha_j \neq \alpha_g$ on calcule $\chi(\alpha_j) = \frac{\phi(\alpha_j) - \phi(\alpha_g)}{1 - g_i v_g}$ et $r_1 = \phi(\alpha_g)$.

b) Si $\alpha_j = \alpha_g$ alors

$$\frac{\phi(\alpha_j) - \phi(\alpha_g)}{1 - g_i v_g} = \frac{\phi'(\alpha_g)}{\left\{ \frac{d}{d\alpha} (1 - g_i v) \right\}_{\alpha=\alpha_g}}$$

d'après la règle de l'Hôpital.

Or $\frac{dv}{d\alpha} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2}{v}$, ou, si l'on préfère, puisque les fonctions ϕ sont exprimées en α^2

$$\frac{dv}{d\alpha^2} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{v} = \frac{3}{4} \frac{v}{\alpha^2}.$$

Le prime (') désignant maintenant une dérivation par rapport à α^2 . Il reste alors:

$$\frac{\phi(\alpha_j)}{1 - g_i v} = -\frac{4}{3} \alpha_g^2 \frac{d}{d\alpha^2} (\phi(\alpha_g)) \frac{1}{g_i v_g} + \frac{\phi(\alpha_g)}{1 - g_i v}.$$

C'est-à-dire que:

$$\chi(\alpha_g) = -\frac{4}{3} \alpha_g^2 \phi'(\alpha_g) \quad \text{et} \quad r_1 = \phi(\alpha_g). \quad (41)$$

Le détail de ce calcul a montré qu'il faudra construire pour chaque g_i , $\phi(\alpha_g)$ et $\phi'(\alpha_g)$. S'il

n'existe aucun j tel que $\alpha_j = \alpha_g$ on interpolera ϕ avec l'aide de (38). On obtiendra d'autre part $\phi'(\alpha_g)$ avec l'application de la formule évidente déduite de (38).

$$\begin{aligned} \phi'(\alpha_g) &= \phi(\alpha_g, \alpha_0) + (\alpha_g^2 - \alpha_0^2) \phi(\alpha_g, \alpha_0, \alpha_1) \\ &+ (\alpha_g^2 - \alpha_0^2) (\alpha_g^2 - \alpha_1^2) \phi(\alpha_g, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) + \dots \end{aligned}$$

Les différences divisées sont construites avec la variable α^2 . Il nous reste maintenant à choisir un ensemble de 8 points qui définissent ϕ . Plutôt que de distribuer les α suivant des valeurs équidistantes de α^2 , nous avons préféré, tout en respectant à peu près cette équidistance, choisir des valeurs de α avec des valeurs correspondantes de v qui coïncident avec les g_i les plus souvent rencontrés, dans les combinaisons d'arguments issues de (39), c'est-à-dire associés à des caractéristiques faibles, et qui recouvrent tout l'intervalle utile. On économise ainsi un grand nombre d'interpolations. On évite aussi une perte de précision inévitable dans le calcul de $\frac{\phi(\alpha_j) - \phi(\alpha_g)}{1 - g_i v_j}$ quand α_j est voisin de α_g .

Il y a lieu de faire à ce propos une remarque importante. C'est sans doute à cause de ces différences voisines que nous perdons le plus de précision dans cette méthode. Et il y aurait avantage dans un programme de calcul plus large, à conserver plus de 8 points (10 à 12 pour des caractéristiques faibles) ou bien quelques dérivées $\phi'(\alpha_j)$ en plus des $\phi(\alpha_j)$. Nous donnons ci-dessous les points que nous avons choisis (Tableau des α):

Dans notre programme de calcul ces valeurs de base peuvent être changées ce qui nous a permis de faire des contrôles internes sur la précision de nos résultats.

Dans le cas où $p = 2$ il suffit d'appliquer encore une fois sur la fonction d'interpolation

$$\frac{\{\chi(\alpha_0) \chi(\alpha_1) \dots \chi(\alpha_7)\}}{(1 - g_i v)}$$

les formules (40) et (41).

Tableau des α

	1	2	3	4	5	6	7	8
α	0,30285344	0,39685026	0,48074986	0,54288352	0,62996052	0,68861207	0,71137866	0,76314283
α^2	0,09172021	0,15749013	0,23112043	0,29472252	0,39685026	0,47418658	0,50605960	0,58238698
v	1/6	1/4	1/3	2/5	1/2	4/7	3/5	2/3
	0,16666667	0,25	0,33333333	0,4	0,5	0,57142857	0,6	0,66666667

4. Le programme de calcul du second ordre

Dans ce type de théorie planétaire, il est important de donner quelques principes de programmation de la construction du second ordre des masses. Avec l'expérience que nous avons acquise sur l'encombrement et les temps de calcul dans l'ensemble des programmes d'opérations sur les séries littérales à cinq variables métriques et quatre variables angulaires, dans le développement d'une théorie analytique de la Lune, il nous est apparu qu'il était impossible de procéder dans ce cas de façon analogue pour les raisons suivantes :

a) Dans les deux cas, les notions d'ordre pour les petits paramètres sont de nature tout à fait différentes. Alors que dans le cas d'un problème de type lunaire on peut considérer le monôme $(n'/n)^{r_1} e^{r_2} \cdot \gamma^{r_3} e'^{r_4} (a/a')^{r_5}$ comme d'ordre $\varepsilon^{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5}$, ici n'/n et a/a' , ne sont plus des petites quantités. Les expressions où rentrent n'/n et a/a' doivent avoir une «taille variable» suivant la valeur de la caractéristique $\varepsilon^{r_2+r_3+r_4}$. Pour réduire l'encombrement et pour que les développements conservent une signification physique, lorsqu'on sera amené ensuite à leur substituer des valeurs numériques, les fonctions $f(n'/n, a/a')$ doivent être représentées avec des polynômes ou des fractions rationnelles où le nombre de termes dépend de la précision avec laquelle on veut calculer les différentes inégalités. Il serait en effet illusoire de vouloir calculer avec la même erreur, f pour une caractéristique 2 ou 6, (f_2 et f_6) bien qu'en général f_6 soit 1000 à 10000 fois plus grand que f_2 . A ce sujet on pourra se reporter à Le Verrier pour examiner la très lente décroissance des coefficients avec des caractéristiques croissantes (voir aussi les résultats que nous avons obtenus dans le paragraphe suivant).

b) On a vu que l'apparition des petits diviseurs exigeait aussi la modification de cette notion d'ordre. Nous avons choisi ici l'hypothèse la plus simple en considérant tous les diviseurs comme du même ordre de grandeur.

On pourrait envisager de faire jouer un rôle particulier aux plus faibles d'entre eux (Tableau 4). Nous avons d'autre part signalé que la liste des petits diviseurs devrait être étendue, dans un cadre plus large que le nôtre.

c) Même si les calculs sont conduits sur un gros ordinateur il n'est pas envisageable de faire brutalement le produit des deux séries $\partial\sigma/\partial x$ avec $\Delta_1 x$ (formule (39)) à cause de l'encombrement de chacune d'entre elles et du temps de calcul nécessaire à une

opération élémentaire, c'est-à-dire un coefficient d'un argument de $\partial\sigma/\partial x$ (6 variables) avec un coefficient de $\Delta_1 x$. A titre d'exemple on verra, avec les hypothèses faites sur les ordres qu'il faut compter environ 250 opérations élémentaires pour produire un argument de caractéristique 3 dans le résultat. Il apparaît donc essentiel de tronçonner le produit $\partial\sigma/\partial x \times \Delta_1 x$ en opérations partielles de telle façon qu'un argument choisi a priori puisse être trouvé au bout d'un temps de calcul compatible avec les dimensions de l'ordinateur, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer en bloc tout le calcul. A ce sujet, il faut bien distinguer entre la gestion au niveau des polynômes en e, e', γ, α , et celle au niveau des arguments. Cette dernière est beaucoup plus volumineuse que dans le cas des séries qui rentrent dans la théorie de la Lune, à cause de la très grande variété de dimensions des tableaux attachés à chaque argument, de la complexité de la notion d'ordre (inhomogénéité entre ordre de la caractéristique et ordre du diviseur), et du nombre des variables. Il y a donc intérêt à effectuer l'ensemble de la gestion pour les arguments dans le plus petit volume machine possible, et donc de façon séparée du calcul sur les polynômes. On sait en effet que plus on est obligé d'étendre le volume des informations sur des unités périphériques à accès lent (disques ou rubans) et plus la perte de temps est grande à cause des temps d'exploration et de transfert. D'autre part la séparation de $\frac{\partial\sigma}{\partial x} \times \Delta_1 x$ en autant de produits qu'il y a d'accroissements nous obligerait à recommencer autant de fois cette gestion. Pour les mêmes raisons il serait souhaitable de traiter simultanément le cas des planètes intérieures et extérieures (4 théories).

Compte tenu de ces remarques nous avons procédé de la façon inverse à ce qu'il est habituel dans les opérations sur les séries de Fourier, en partant de l'argument résultat et en cherchant toutes les combinaisons qui permettent de l'obtenir. Nous avons séparé le travail en deux temps, en effectuant d'une part les calculs pour les arguments et les caractéristiques, quelles que soient les variables ou les accroissements, et d'autre part les calculs sur les polynômes. La première partie consiste à fabriquer les opérations qui commanderont l'exécution de la deuxième, de façon à n'opérer que les recherches sur les unités périphériques et l'algèbre nécessaires, avec les limitations en ordre pour chaque produit élémentaire, pour ne pas être obligé de faire des transferts à l'ordre maximum.

Donnons le schéma de la construction du second ordre, avec les limitations en ordre qui suivent. A partir de la liste d'arguments décrite plus haut, on conserve toutes les caractéristiques ε^* dans les résultats, où $s \leq 3$ si le terme ne contient pas de petit diviseur, et toutes celles ≤ 5 dans le cas contraire qu'il s'agisse d'un accroissement $\Delta_1 x$ ou d'un diviseur qui apparaît après l'intégration de $\Delta_2 x$. On construit les deux séries $\partial\sigma/\partial x$ et $\Delta_1 x$ à partir des développements analytiques en α dont nous disposons au premier ordre, en substituant à ces développements des polynômes calculés aux huit points du § (B2). On forme donc

$$\Delta_1 x = \frac{n\alpha m'}{1+m} \sum_{i,j} \frac{A_j(\alpha, e, e', \gamma)}{(1-g_i v)^p} \frac{\cos \phi_j}{\sin \phi_j} + B_j \frac{\cos \phi_j}{\sin \phi_j}$$

où

$$\phi_j = q\lambda + q'\lambda' - (q-s)\varpi - (q'-s')\varpi' - (s-j)h$$

où les arguments sont rangés de telle façon que tous les diviseurs $(1-g_i v)$ avec le même g_i , soient groupés ensemble. Si, par exemple; on s'intéresse à l'équation pour la longitude $\frac{d\lambda}{dt} = \sum C_j \cos \phi_j$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \left\{ \frac{d\lambda}{dt} \right\} &= \sum_j C_j \sin \phi_j \\ &\cdot \{ -q \Delta_1 \lambda + (q-s) \Delta_1 \varpi + (s-j) \Delta_1 h \} \\ &+ \cos \phi_j \left\{ \alpha \frac{\partial C_j}{\partial \alpha} \Delta_1 \alpha + \frac{\partial C_j}{\partial e} \Delta_1 e + \frac{\partial C_j}{\partial \gamma} \Delta_1 \gamma \right\} \\ &- \frac{1}{2} C_j \Delta_1 \alpha \cos \phi_j. \end{aligned} \quad (42)$$

Le dernier terme de (42) apparaît de la façon suivante. Mettons en évidence le facteur multiplicatif dans $d\lambda/dt = \sigma_\lambda$

$$\sigma_\lambda = \frac{m'}{1+m} n \alpha E$$

où E est un polynôme en α, e, e', γ et écrivons

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial \alpha} &= \frac{m'}{1+m} \left[n \alpha \alpha \frac{\partial E}{\partial \alpha} - \alpha \frac{n}{2} E \right] \\ &= \frac{m'}{1+m} n \alpha \left[\alpha \frac{\partial E}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} E \right] \end{aligned}$$

avec

$$\frac{d}{d\alpha} (n \alpha) = n - \frac{3}{2} \frac{n}{\alpha} \alpha = -\frac{n}{2}$$

et l'on retrouve les deux termes en $\Delta \alpha$ de (42). Il faut bien prendre garde que dans $d/d\alpha (n \alpha)$ il ne s'agit en fait que d'une dérivation par rapport à α , puisqu'on ne recherche ici que les perturbations en m'^2 .

Remarquons que dans $\Delta_1 \lambda$ il intervient:

$$\int n dt = \int \int -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt} dt^2 = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \int \Delta_1 a dt$$

où rentrent les diviseurs: $(1-g_i v)^{-2}$.

Toutes les variables x pour chaque argument dans la suite $\Delta_1 x$ sont groupées ensemble et traitées simultanément afin de ne pas multiplier par 6 la gestion au niveau des arguments.

Remarque 1. Il est utile de regrouper dans les calculs les deux quantités $a = C_j \times \Delta_1 \varpi$ avec $b = \frac{\partial C_j}{\partial e} \times \Delta_1 e$ ainsi que $C_j \times \Delta h$ avec $\frac{\partial C_j}{\partial \gamma} \times \Delta_1 \gamma$.

En effet, dans l'expression pour la longitude les caractéristiques associées aux arguments sont les mêmes que dans la fonction perturbatrice malgré les pertes apparentes d'ordre en excentricité (ou en inclinaison) à travers a et b . Il faut donc voir comment sont combinées a et b pour l'excentricité, les résultats étant les mêmes pour l'inclinaison. Désignons par $c e^{|v|} \cos(-v\varpi + \psi_1)$ un terme quelconque de C_j , où c est un polynôme en α et par $c' e^{|v|} \cos(-v\varpi + \psi_2)$ un terme de R . ψ_1 et ψ_2 sont les parties des arguments indépendantes de ϖ . Dans $\Delta_1 e$ le terme de plus bas degré en e a la forme:

$$\Delta_1 e = v c'' e^{|v|-1} \cos(-v\varpi + \psi_2) + \dots$$

et dans $\Delta_1 \varpi$

$$\Delta_1 \varpi = c'' |v| e^{|v|-2} \sin(-v\varpi + \psi_2) + \dots$$

Alors

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial C_j \cos \phi_j}{\partial \varpi} \Delta_1 \varpi + \frac{\partial C_j}{\partial e} \cos \phi_j \Delta_1 e \\ &= c c'' e^{|u|+|v|-2} \\ &\cdot \left[\left\{ \frac{|u|v| - v|u|}{2} + \dots \right\} \cos[-(u+v)\varpi + \psi_1 + \psi_2] \right. \\ &\left. + \left\{ \frac{|u|v| + v|u|}{2} + \dots \right\} \cos[-(u-v)\varpi + \psi_1 - \psi_2] \right]. \end{aligned}$$

L'ordre du facteur est apparemment $|u| + |v| - 2$ et il y a une perte de deux ordres en excentricité. Mais il est clair que:

si $u.v > 0$ $u|v| - v|u| = 0$ et l'argument $-(u-v)\varpi + \psi_1 - \psi_2$ d'ordre $|u-v|$ est bien tel que:

$$|u-v| \leq |u| + |v| - 2.$$

Si $u.v < 0$, alors $u|v| + v|u| = 0$ et le terme de plus bas degré en e est $e^{|u|+|v|}$, puisque les excentricités vont de deux en deux. On ferait un raisonnement analogue sur l'argument $-(u+v)\varpi + \psi_1 + \psi_2$.

Remarque 2. Examinons maintenant quelle valeur donner à ϱ dans $(1 - \alpha^2)^{-e}$ pour un terme de caractéristique ε^r dans $\Delta_2 \lambda$. Il suffit pour cela de revenir au tableau du § (A - 6) et de rechercher les différentes valeurs de ϱ à travers les combinaisons $\frac{\partial C_i \cos \phi_i}{\partial x} \Delta x$, où l'on sait dans chacune de ces expressions associer r à ϱ .

Ecrivons directement le résultat pour chacun des termes de la formule (42) avec les mêmes conventions d'écriture que dans le Tableau du paragraphe (A - 6). Dans

$$C_i \cdot \Delta \alpha \quad (r, r + 1),$$

$$C_i \cdot \Delta \lambda \quad (r, r + 2),$$

$$C_i \cdot \Delta \varpi \text{ ou } C_i \cdot \Delta h \quad (r, r + 3),$$

$$\alpha \frac{\partial C_i}{\partial \alpha} \Delta \alpha \quad (r, r + 2),$$

dans

$$\frac{\partial C}{\partial e} \cdot \Delta e \text{ ou } \frac{\partial C}{\partial \gamma} \cdot \Delta \gamma \quad \text{si} \begin{cases} q - s \neq 0 \\ \text{ou } s - j \neq 0 \end{cases} \quad (r, r + 1),$$

$$\text{si} \begin{cases} q - s = 0 \\ \text{ou} \\ s - j = 0 \end{cases} \quad (r, r + 3).$$

Finalement on conservera dans le coefficient du résultat le facteur $\frac{\varepsilon^r}{(1 - \alpha^2)^{r+s}}$, en ayant soin de multiplier soit par $(1 - \alpha^2)$ soit par $(1 - \alpha^2)^2$ les termes de la formule (42), en suivant le tableau ci-dessus.

Examinons brièvement comment est organisé le programme de calcul pour sa partie qui commande l'algèbre à exécuter sur les $\partial \sigma / \partial x$ et les Δx . On commence par fabriquer la liste de tous les arguments qui par somme ou différence engendreront un argument donné a priori, soit ψ . Ces arguments sont rangés par catégories de diviseurs $(1 - g_i \nu)$.

On détermine pour chaque combinaison :

- le facteur en α , soit α^λ
- le facteur en $(1 - \alpha^2)$ soit $(1 - \alpha^2)^e$

- l'ordre du facteur pour chaque produit individuel $C \times \Delta \lambda$, $\partial \alpha / \partial \alpha \times \Delta \alpha$ etc., compte tenu à la fois de la caractéristique et du diviseur. Il y a en tout sept produits d'après (42) soient ω_i (i , 1 à 7). On construit une suite d'informations. I_ψ

$$I_\psi = \{\phi_1, \phi_2, 1 - g_i \nu, \lambda, \varrho, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}$$

$$\text{avec } \psi = \phi_1 - \phi_2 \text{ ou } \phi_1 + \phi_2$$

les I_ψ sont triées sur l'ensemble des g_i pour regrouper tous les I_ψ de même g_i .

La suite I_ψ nous permet de limiter grâce aux ω_i , chaque produit partiel à l'ordre minimum, ou même d'éviter de faire ce produit s'il y a lieu. On complète grâce à la donnée de λ et ϱ aux puissances de α et $(1 - \alpha^2)$ qui conviennent. Il est facile d'imaginer que la suite I_ψ peut être construite dans un petit volume machine, puisque cette construction ne s'opère qu'au niveau des arguments, indépendamment du calcul sur les polynômes. L'exécution de l'algèbre sur les polynômes sera commandée par la suite I_ψ , aux ordres minimums.

Il est utile de donner une illustration d'une telle suite I_ψ , pour réaliser l'économie de temps que l'on peut faire grâce à cette méthode. L'exemple que nous proposons se rapporte à la grande inégalité de Jupiter et de Saturne soit

$$\psi = 2l - 5l' + 5g - 5g' + 5(h - h') \\ = 2\lambda - 5\lambda' - 3\varpi + 5(h - h').$$

Sa caractéristique est e^3 , et l'on a au second ordre le facteur $\frac{\alpha^5}{(1 - \alpha^2)^6} e^3$.

On a trouvé pour ψ , 221 combinaisons d'arguments $\phi_1 \pm \phi_2$, dans lesquelles rentre un total de 10 petits diviseurs. Les ω_i qui nous serviront à limiter nos opérations sont distribués de la façon suivante.

$$\omega_i > 5 \quad 41\%,$$

$$\omega_i = 5 \quad 33\%,$$

$$\omega_i = 3 \quad 22\%,$$

$$\omega_i = 1 \quad 4\%.$$

Dès que $\omega_i > 5$, $\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \Delta_1 x = 0$ à l'ordre 5 considéré.

D'une manière générale on calcule $\partial \sigma / \partial x \times \Delta_1 x$ à l'ordre $5 - \omega_i$. On voit que de cette façon, les opérations sont économisées au maximum, et qu'il y aurait une perte considérable de temps à opérer directement sur les deux séries $\partial \sigma / \partial x$ et Δx , sans la constitution de la suite I_ψ .

5. Résultats

Afin d'illustrer les calculs du second ordre, nous donnons un échantillon des résultats pour la longitude dans l'équation $d\varepsilon/dt$, pour un argument ϕ_1 de la fonction perturbatrice, rassemblé dans le Tableau 6.

$$\phi_1 = 2l - 5l' + 5g - 5g' + 5(h - h');$$

Facteur :

$$\frac{\alpha^5}{(1 - \alpha^2)^6} e^3.$$

Nous avons effectué le même type de calculs pour de nombreux arguments choisis afin de représenter des caractéristiques différentes et des diviseurs distribués sur tout l'intervalle de ν (0; 0,66). A titre de vérification interne du programme, nous avons contrôlé dans l'équation da/dt l'absence de termes constants puisque l'on sait, avec le théorème de Poisson, que les termes séculaires doivent se détruire au second ordre des masses. En fait ces termes ne s'éliminent pas rigoureusement évidem-

ment, à cause des erreurs d'arrondis, et les résidus trouvés nous ont permis d'apprécier exactement les erreurs internes de notre programme. Elles sont croissantes avec α ; les erreurs relatives sont de l'ordre de 10^{-6} avec $\alpha = 0,3$ et de 10^{-4} avec $\alpha = 0,7$. Ce phénomène est dû à plusieurs raisons: les erreurs de troncature sur les fonctions $\psi(\alpha^2)$ du premier ordre; les erreurs dans la méthode de calcul des $\chi(\alpha)$ surtout lorsqu'il se présente un diviseur qui n'est pas dans la liste du § (3); les erreurs dans l'expression

Tableau 7 A

	e'^2	γ^2	e^2	$(q - q'\nu)^{-p}$
	- 11,827		- 2,7694	$(1 - 5\nu)^{-2}$
- 9,4710	+ 35,0344	+ 89,880	+ 0,5251	$(1 - 5\nu)^{-1}$
- 2,2394	+ 36,583	+ 32,883	- 3,3306	$(1 - 4\nu)^{-2}$
- 11,771	+ 128,48	+ 193,55	+ 3,9508	$(1 - 4\nu)^{-1}$
- 18,227	+ 97,770	+ 163,45	+ 1,2641	$(1 - 3\nu)^{-2}$
- 45,889	+ 461,97	+ 312,36	+ 32,290	$(1 - 3\nu)^{-1}$
- 8,0487	+ 147,30	+ 107,20	- 2,4142	$(1 - 2\nu)^{-2}$
- 4,6992	+ 756,48	- 325,88	+ 56,937	$(1 - 2\nu)^{-1}$
- 5,4595	+ 21,709	+ 128,76	+ 7,5267	$(2 - 5\nu)^{-1}$
+ 3,0562	+ 37,173	- 89,470	+ 4,6890	$(2 - 3\nu)^{-2}$
+ 37,149	+ 376,16	+ 1534,6	+ 93,166	$(2 - 3\nu)^{-1}$
	+ 104,80			$(3 - 7\nu)^{-2}$
	+ 61,377			$(3 - 7\nu)^{-1}$
+ 5,1859	+ 26,326	- 115,56	+ 5,5079	$(3 - 5\nu)^{-2}$
+ 32,541	+ 253,39	- 1004,0	+ 60,852	$(3 - 5\nu)^{-1}$
+ 24,710	- 60,552	- 370,25	- 8,2464	$(4 - 7\nu)^{-2}$
+ 60,756	- 357,91	- 655,24	- 38,268	$(4 - 7\nu)^{-1}$
+ 31,272	- 154,60	- 521,94	- 25,712	$(5 - 8\nu)^{-2}$
+ 82,125	- 733,08	- 1123,7	- 111,63	$(5 - 8\nu)^{-1}$

Tableau 7 B

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	+ 424,67	+ 510,27	+ 650,35	+ 766,89	+ 906,36	+ 966,66	+ 985,53	+ 1084,8
e'^2	- 3147,5	- 4468,9	- 5522,5	- 5135,8	- 1500,3	+ 3369,7	+ 5831,2	+ 13741,0
γ^2	- 11429,0	- 18418,0	- 26349,0	- 33166,0	- 44003,0	- 52550,0	- 56505,0	- 70781,0
e^2	- 1092,8	- 1479,7	- 1813,7	- 1860,9	- 1338,8	- 459,57	+ 23,636	+ 1681,6

— Dans la partie (A) on représente les fractions:

$$\frac{1}{1 - g, \nu} \sum_j r_j \varepsilon^j$$

pour tous les g_i rencontrés.

ε^j est une caractéristique $\mathcal{C} = (X, Y, Z)$

X = puissance de e

Y = puissance de γ

Z = puissance de e'

(C'est cette caractéristique $\mathcal{C}$ qu'on a répartie sur les Figs. 4 à 6).

— Dans la partie (B) on écrit les polynômes d'interpolation χ_s tels que

$$(B) = \sum_j (\chi_s)_j \varepsilon^j.$$

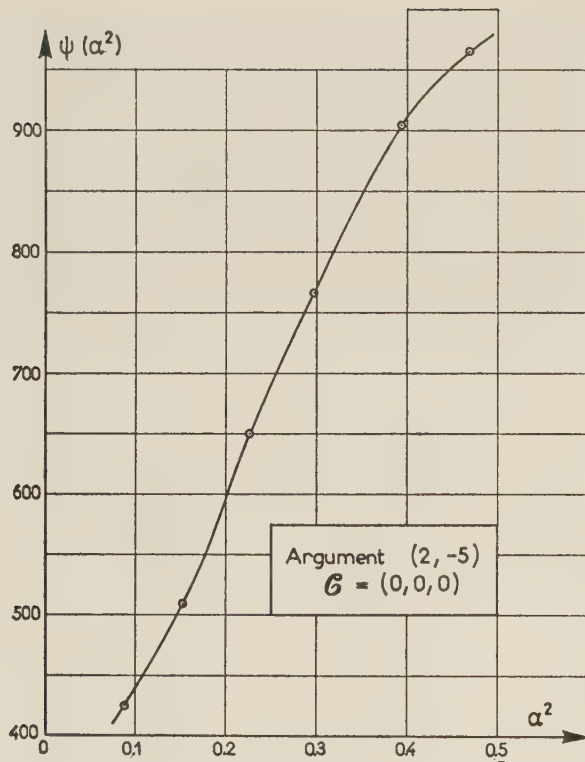


Fig. 4

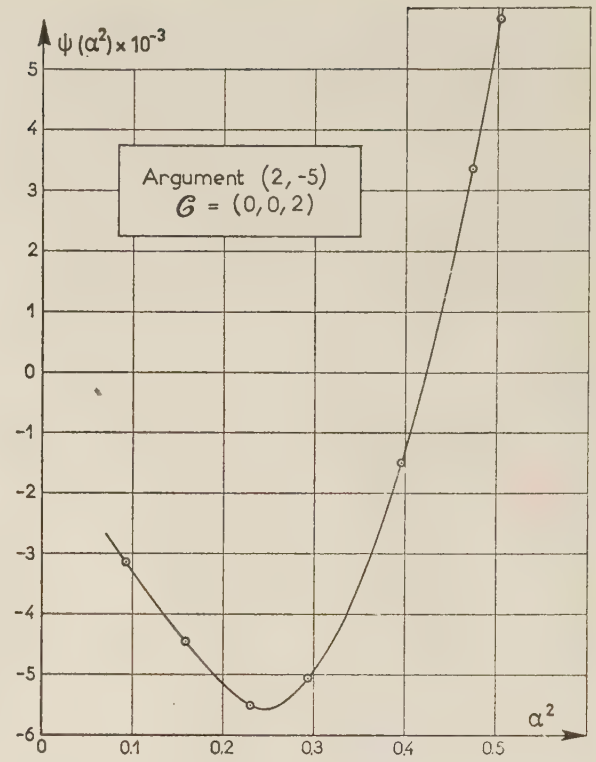


Fig. 5

numérique des coefficients des fonctions $\psi(\alpha^2)$ calculées par différences successives, dans un programme en simple précision. Une autre méthode de vérification interne est le calcul des $\partial\sigma_i/\partial x$ et des Δx_i à partir de points de base $\alpha_i (i = 1 \text{ à } 8)$ différents de ceux donnés dans la liste du § (3). Lorsqu'on compare les deux systèmes par interpolation on a une estimation des erreurs commises. De toute façon la précision donnée est largement suffisante ici compte tenu du fait que nous nous limitons à ε^5 et que la liste des arguments construite pour la fabrication du second ordre est bornée en α^2 où $\lambda = 14$, au maximum, avec une caractéristique nulle. Il est en effet remarquable de voir si l'on consulte le résultat pour $\psi(\alpha^2)$ du Tableau 7 à α fixé, la très lente décroissance de la valeur numérique globale d'un coefficient (e, γ, e' substitués numériquement) au fur et à mesure qu'on introduit des caractéristiques croissantes. On pourra retrouver ce résultat chez Le Verrier. $P_5(\alpha) \varepsilon^5$ est quelquefois de l'ordre de $P_1(\alpha) \varepsilon \times 10^{-2}$ avec des α grands (0,6 ou 0,7). Il est clair que pour les coefficients importants du second ordre il faudrait aller jusqu'à ε^7 pour atteindre le 1/100 de seconde.

Sur les Figs. (4) à (6) nous avons représenté quelques fonctions $\psi(\alpha^2)$. A cause de la présence des diviseurs à l'extérieur de notre intervalle de valeurs possibles de ν , on peut, en extrapolant ces courbes, imaginer la présence d'asymptotes verticales. La partie utile de ces courbes a été marquée en traits pleins. Leur allure montre qu'elles peuvent bien s'interpoler avec la formule de Lagrange entre les points calculés. En particulier sur la Fig. (6), pour l'argument $\phi = 2l - 3l' + 3g - 3g' + 3(h - h')$ avec le facteur $\frac{\alpha^5 e}{(1 - \alpha^2)^4}$ pour lequel nous ne donnons qu'un résultat graphique, on verra le changement rapide de sens de variation à la limite de l'intervalle utile, dû à la présence d'une asymptote voisine de l'extrémité de l'intervalle. Pour gagner en précision dans ces cas limites il faudrait sans doute disposer d'un plus grand nombre de points de base, pour des α dans l'intervalle (0,5; 0,72).

Afin de représenter complètement les variations d'un coefficient il faudrait superposer à ces courbes les fonctions de la forme :

$$\frac{r_i}{1 - g_i \nu}$$

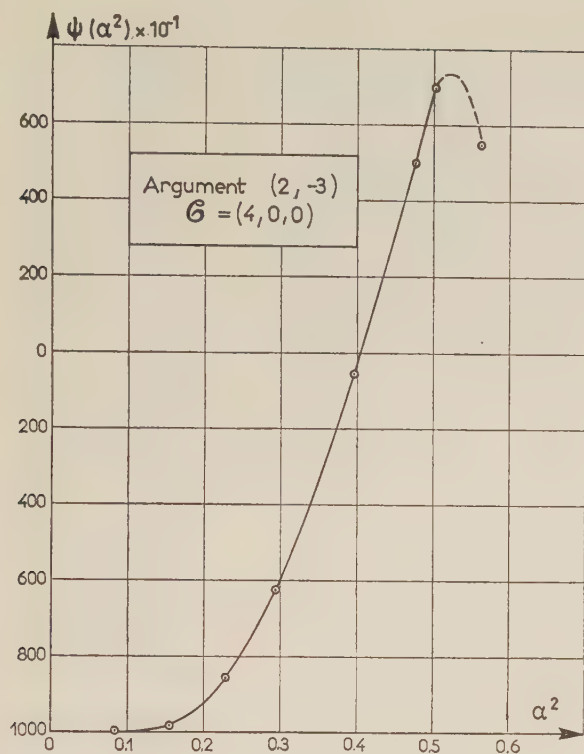


Fig. 6

qui ont une variation rapide au voisinage de l'asymptote $\nu = 1/g_i$. On obtiendrait alors une courbe telle que celle de la Fig. (3). On peut remarquer que les coefficients où rentre l'inclinaison sont plus importants que dans le cas des excentricités seules. Ceci était déjà vrai au premier ordre. Cependant dans le cas des planètes du système solaire γ est toujours petit (inférieur à 0,05) si bien que les développements restent encore convergents. Dans le cas extrême de Mercure ($e = 0,206$; $i = 7^\circ$; $\alpha \leq 0,39$) ces développements sont insuffisants.

Il y a une remarque intéressante à faire sur l'argument ϕ_1 . A l'ordre où nous avons travaillé (ε^5) le diviseur $(2 - 5\nu)$ n'existe qu'à la première puissance, si bien qu'il n'apparaîtra qu'à l'ordre 2 après l'intégration de $d\varepsilon/dt$. Cette circonstance, qui s'explique bien au niveau de l'algèbre sur les caractéristiques, empêche ce coefficient d'atteindre des valeurs trop fortes dans le cas de la grande inégalité. Il faut remarquer aussi, qu'en dehors d'un très petit voisinage d'un petit diviseur (environ 10^{-2}) les quantités $\frac{r_i}{1 - g_i \nu}$ sont de l'ordre de $\phi(\alpha_i)$ où $\alpha_i = \nu^{-3/2}$.

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes attachés à justifier la méthode d'approximation choisie et à démontrer la possibilité de construire complètement une théorie planétaire littérale jusqu'au second ordre des masses, où le volume de calcul et la quantité d'informations numériques à traiter restent suffisamment petits pour être utilisables. Nous avons déjà signalé en plusieurs endroits les limitations que nous nous sommes imposées, et les prolongements qu'il faudrait apporter à ce travail pour construire une théorie directement utilisable d'un point de vue pratique. Nous allons résumer ces critiques ci-dessous.

1 — Au premier ordre, afin d'éviter une perte de précision inévitable dans le processus de différences successives pour factoriser $(1 - \alpha^2)^{-e}$, il y aurait intérêt à partir d'un formulaire modifié (§ A - 4) afin de ne pas avoir à opérer un trop grand nombre de calculs en double précision qui sont coûteux en temps.

2 — Il faudrait allonger la liste fondamentale d'arguments afin d'inclure dans celle-ci la plupart des multiples des inégalités à moyenne ou longue période du système solaire, qui sont indiquées dans le Tableau 4. En revenant à la notion de caractéristique $\bar{\mathcal{C}} = \alpha^4 \mathcal{C}$, et en introduisant des petits diviseurs pouvant éventuellement diminuer $\mathcal{C}$ d'une ou deux unités, il faudrait atteindre des valeurs de λ au moins égales à 18 ou 20 à l'ordre 0 des petits paramètres (ε°). Pour le second ordre avec $\gamma' \neq 0$, une liste de 2000 à 3000 arguments devrait pouvoir permettre d'atteindre toutes les inégalités de l'ordre du 1/100 de seconde.

3 — Il y aurait un gain considérable de temps à construire simultanément les perturbations des cas intérieurs et extérieurs, et à traiter les 4 cas du second ordre (en m^2 , mm' , $m'm$ et m'^2) dans un même ensemble puisque les calculs au niveau des arguments et des caractéristiques sont identiques.

Une quinzaine d'inégalités particulièrement importantes comme la grande inégalité de Jupiter-Saturne, devraient être traitées à part, avec des ordres maximums en excentricités et inclinaisons plus importants (7 à 8), pour atteindre une précision comparable aux autres, à cause de la très lente convergence numérique des coefficients à caractéristiques croissantes. Ceci est tout à fait possible puisque les calculs sont faits argument par argument.

4 — On pourrait augmenter la liste des petits diviseurs de quelques unités. Mais il n'y aurait pas un gain considérable de précision à allonger trop

Tableau 8

(0,0,0,0)	+10500000 E+02 *00	+17062500 E+02 *02	+31171900 E+01 *04	-11279000 E+00 *06
-71100000 E-02 *08	-12600000 E-02 *10	-31000000 E-03 *12	-35000000 E-03 *14	-47000000 E-03 *16
+10000000 E-02 *18				
(2,0,0,2)	-26250000 E+02 *00	-40359375 E+03 *02	-64271505 E+03 *04	-14906600 E+03 *06
-60800000 E+00 *08	-76500000 E-01 *10	-14300000 E-01 *12	+38600000 E-01 *14	
(2,0,2,0)	+15750000 E+02 *00	+20081250 E+03 *02	+31623050 E+03 *04	+77212000 E+02 *06
+11370000 E+01 *08	+18500000 E-01 *10	-12500000 E-01 *12	+22000000 E-01 *14	
(2,0,2,0)	-33750000 E+02 *00	-41203125 E+03 *02	-60275415 E+03 *04	-17385900 E+03 *06
+33100000 E+00 *08	-24000000 E+00 *10	-48000000 E-02 *12	+20000000 E-03 *14	
(2,2,0,0)	-15000000 E+01 *00	+38531250 E+02 *02	+18996094 E+03 *04	+75758140 E+02 *06
+28681400 E+01 *08	-38210000 E-01 *10	+27400000 E-02 *12	-16200000 E-01 *14	
(4,0,0,4)	+91875000 E+01 *00	+14252110 E+04 *02	+11173252 E+05 *04	+16329613 E+05 *06
+50799200 E+04 *08	+20718500 E+03 *10			
(4,0,2,2)	-39375000 E+02 *00	-24904688 E+04 *02	-16621785 E+05 *04	-23758680 E+05 *06
-79673940 E+04 *08	-45887700 E+03 *10			
(4,0,4,0)	+19687500 E+02 *00	+61769531 E+03 *02	+26830372 E+04 *04	+25675726 E+04 *06
+51846350 E+03 *08	+10840900 E+02 *10			
(4,0,2,0,2)	+84375000 E+02 *00	+51630469 E+04 *02	+33223798 E+05 *04	+47037813 E+05 *06
+16197767 E+05 *08	+96579000 E+03 *10			
(4,0,2,2,0)	-50625000 E+02 *00	-26676563 E+04 *02	-16565012 E+05 *04	-23363992 E+05 *06
-81626710 E+04 *08	-52578400 E+03 *10			
(4,0,4,0,0)	+14437500 E+02 *00	+16686798 E+04 *02	+11167262 E+05 *04	+15647074 E+05 *06
+54651670 E+04 *08	+25918300 E+03 *10			
(4,2,0,0,2)	+37500000 E+01 *00	-31054688 E+03 *02	-56384177 E+04 *04	-13057111 E+05 *06
-61683420 E+04 *08	-49698700 E+03 *10			
(4,2,0,2,0)	-22500000 E+01 *00	+16565625 E+03 *02	+28470590 E+04 *04	+64621444 E+04 *06
+30945054 E+04 *08	+26596600 E+03 *10			
(4,2,2,0,0)	-11250000 E+02 *00	-48445313 E+03 *02	-55569728 E+04 *04	-12719013 E+05 *06
-63183180 E+04 *08	-57765300 E+03 *10			
(4,4,0,0,0)	+56249980 E+00 *00	-19265625 E+02 *02	+81580027 E+02 *04	+90809802 E+03 *06
+99550518 E+03 *08	+16972230 E+03 *10			

cette liste car ceux-ci deviennent de plus en plus nombreux quand on se rapproche de $\nu = 1$. Il y a certainement plutôt intérêt à augmenter le nombre de points du polynôme d'interpolation dans l'intervalle utile de ν , 12 à 14 points pour des caractéristiques faibles donneraient de bons résultats. On pourrait alors atteindre une précision interne sur 5 à 6 décimales quel que soit α .

Nous envisageons maintenant d'élaborer une théorie complète sur l'ordinateur 360 - 65 de l'Observatoire de Meudon, en apportant à la méthode les améliorations indiquées. Il faut dire pour conclure quelques mots sur les perturbations dans le cas de trois planètes (m, m', m''). Les polynômes d'interpolation ne seront plus alors fonction d'une seule variable α , mais de deux variables α et α' . Afin de ne pas avoir à multiplier le nombre de points (α_i, α_j) on pourra profiter de la circonstance indiquée au § (A - 3) sur les groupements en α autour de 3 valeurs. On cherchera à calculer les fonctions $\phi(\alpha_i, \alpha_j)$ avec plus de précision dans les domaines qui nous

intéressent. Par rapport au modèle précédent de 8 points de base, il serait inutile ici de calculer ces fonctions en $8 \times 8 = 64$ points, puisqu'un grand nombre de ces points sont à écarter. On pourrait choisir un quadrillage (α_i, α_j) d'une vingtaine de points qui donnera avec une formule d'interpolation de Lagrange à deux variables une précision suffisante pour l'évaluation des $\phi(\alpha, \alpha')$.

Remerciements. Que Monsieur J. Kovalevsky, Astronome titulaire au Bureau des Longitudes, qui a dirigé mes recherches durant cinq années trouve ici l'expression de toute ma gratitude. J'ai pu apprécier durant tout ce temps, son amitié et la profondeur de ses jugements scientifiques. Mes remerciements vont aussi à Monsieur Y. Thiry, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, pour ses conseils et ses critiques, ainsi qu'à Messieurs F. Nahon et J. Rösch, Professeurs à la Faculté des Sciences de Paris, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues du Bureau des Longitudes, techniciens et chercheurs, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée, et, en particulier, à Madame Jannot, technicienne CNRS et Monsieur Vu, ingénieur CNRS.

Références

- Brouwer, D., Clemence, G.M. 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, chap. 15, Academic Press, London.
- Brown, E., Shook, C. 1934, *Planetary theory*, chap. 4, Dover.
- Brumberg, V. 1967, *Byull. Inst. Teor. Astron.* T 11, 2, 125.
- Brumberg, V. 1967, *Soviet Astronomy* 11, 1, page 156.
- Challe, A., Laclaverie, J.J. 1969, *Astron. Astrophys.* 3, 15.
- Chapront, J., Mangeney, L. 1969, *Astron. Astrophys.* 2, 425. CNRS. public. 1957, *Fonctions de la physique mathématique*, Fasc. 9, Paris.
- Hamid, S.E. 1969, *Smithsonian Astrophys. Observ. Special report n° 285 et 302*.
- Hobson, E.W. 1955, *Spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge.
- Izsak, I.G. 1963, *Smithsonian Astrophys. Observ. Special report 129*.
- Izsak, I.G. 1964, *Special report 140*.
- Izsak, I.G. 1965, *Special report 164*.
- Kaula, W.M. 1962, *Astron. Journal* 67, 300.
- Kovalevsky, J. 1968, *Astron. Journal* 73, 203.
- Le Verrier, U.J.J. 1871, *Ann. de l'Observatoire de Paris*, Vol. 1.
- Le Verrier, U.J.J. 1874, *Ann. de l'Observatoire de Paris*, Vol. 10.
- Mineur, H. 1966, *Techniques de calcul numérique*, Dunod.
- Petrovskaya, M. 1968, *Bull. Astron.* 2° série T 3, Fasc. 1.
- Plumer, H.C. 1918, *An introductory treatise on dynamical Astronomy*, chap. 14, Dover.
- Tisserand, F. 1888, *Traité de Mécanique Céleste*, T 1, chap. 28, chap. 17, Gauthier-Villars.
- Von Zeipel, H. 1912, *Ark. Mat. Astro. Fys.* Vol. 8, 19.
- Whittaker, E., Watson, G. 1963, *Modern analysis*, Cambridge.

J. Chapront
Observatoire du Bureau des Longitudes
17 rue Deutsch de la Meurthe
F-75 Paris 14, France

Printed in Germany by Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

LES FONCTIONS PRESQUE PERIODIQUES

Vu et approuvé

Paris le 6 mai 1970

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Robert MALLET

